№ 13 (53) 2008
Выпуск 15
НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ БелГУ

Математика. Физика

Belgorod State University Scientific bulletin

Mathematics & Physics

Основан в 1995 г.

Учредитель:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»

Издатель:
Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Оригинал-макет *Бекназаров М.Н.*
E-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Подписано в печать 25.12.2008 г.
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 15,81
Тираж 500 экз.
Заказ 336

Подписные индексы:
в каталоге агентства «Роспечать» – 81631,
в объединенном каталоге
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован
в издательстве Белгородского государственного университета
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

№ 13 (53) 2008
Issue 15
SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Founded in 1995

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ БелГУ
Математика. Физика

Founder:
State educational establishment of higher professional education “Belgorod State University”

Publisher:
Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media
ПИ № ФС 77-21121 May, 19 2008.

CONTENTS

Dummy layout by M.N Beknazarov
e-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Passed for printing 25.12.2008
Format 60x84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 15,81
Circulation 500 copies
Order 336

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue – 81631,
In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at
Belgorod State University Publishing House
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

УДК 517.983

О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ, НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Х.К. АВАД, А.В. ГЛУШАК

Белгородский государственный университет

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

Доказывается однозначная разрешимость задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные, при возмущении уравнения нелинейным слагаемым.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, однозначная разрешимость задачи типа Коши, возмущение, подчиненный оператор.

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + F(t, B(t)u(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{1.2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\, ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ – тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, A – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, $B(t)$ – также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный и, вообще говоря, неограниченный оператор, наконец, $F(t, w)$ – нелинейный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Условие 1. (i) $u_0 \in D(A)$ ($D(A)$ – *область определения оператора* A).

(ii) *Оператор A таков, что при некотором β, удовлетворяющем неравенству $\alpha \le \beta \le 1$, равномерно корректна задача*

$$D^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{1.4}$$

Пусть $T_\beta(t)$ – разрешающий оператор задачи (1.3), (1.4), *т.е.*, $u(t) = T_\beta(t)u_0$, *и при этом*

$$\|T_\beta(t)\| \le M_1\ t^{\beta-1}, \quad M_1 > 0. \tag{1.5}$$

Укажем, что при $0 < \beta < 1$ равномерная корректность задачи (1.3), (1.4) исследовалась в [1, 2, 3], а при $\beta = 1$ оператор A должен быть генератором C_0-полугруппы.

Условие 2. (i) *Оператор* $B(t)$ *имеет не зависящую от* t *область определения* D *и при этом* $D(A) \subset D$.

(ii) *Для любого* $x \in D$ *функция* $D^{\alpha} B(t)x$ *принадлежит* $C((0,\infty), E)$ *и абсолютно интегрируема в нуле*.

(iii) *Для любого* $x \in E$ *существуют постоянные* $\gamma \in (0,1)$, $M_2 > 0$ *такие, что* $T_{\beta}(\tau)x \in D$ (*эффект сглаживания*) *и*

$$\left\| B(t) T_{\beta}(\tau) x \right\| \leq \frac{M_2}{\tau^{\gamma}} \|x\|, \quad t, \tau \in (0, \infty). \tag{1.6}$$

Отметим, что если оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [4]), т.е., если

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad Re\ \lambda \geq 0,\ M_3 > 0,$$

то в условии 1 можно взять $\beta = 1$, а неравенство (1.6) означает, что оператор $B(t)$ подчинен дробной степени $(-A)^{\gamma}$ (см. [4, с. 298]). Перестановочность операторов A и $B(t)$ не предполагается.

Условие 3. (i) *Для любой функции* $w(t)$ *имеющей абсолютно интегрируемую дробную производную* $D^{\alpha} w(t)$ *функция* $D^{\alpha} F(t, w(t))$ *принадлежит* $C((0,\infty), E)$ *и абсолютно интегрируема в нуле.*

(ii) *Для* $w = 0$ *справедливо неравенство* $\|F(t,0)\| \leq C_0(1 + t^{\mu-1})$, $\mu > 0$, $C_0 > 0$.

(iii) *Оператор* $F(t, w)$ *удовлетворяет равномерному по* $t \geq 0$ *условию Липшица*

$$\|F(t, w_2) - F(t, w_1)\| \leq L\|w_2 - w_1\|.$$

Условие 4. *Банахово пространство* E *обладает свойством Радона-Никодима* (*см.* [5, *с.* 15]).

Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством, а пространства $L_1(a,b)$, $C[a,b]$, c_0 (пространство последовательностей, сходящихся к нулю) не обладают.

Как будет доказано в дальнейшем, условия 1 – 4 обеспечат однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.2).

При доказательстве нами будет использована функция (см. [6, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \exp(tz - \tau z^{\nu})\ dz, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $0 < \nu < 1$ и ветвь функции z^{ν} выбрана так, что Re $z^{\nu} > 0$ при Re $z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (1.7) обеспечивается множителем $\exp(-\tau z^{\nu})$.

Если в интеграле, определяющем функцию $f_{\tau,\nu}(t)$ перейти от интегрирования по прямой $z = \sigma > 0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z = r\exp(-i\theta)$ и $z = r\exp(i\theta)$, где $0 < r < \infty$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, то при $t > 0$ для функции $f_{\tau,\nu}(t)$ получится представление

$$f_{\tau,\nu}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(tr\cos\theta-\tau r^\nu\cos\nu\theta)\sin(tr\sin\theta-\tau r^\nu\sin\nu\theta+\theta)\ dr. \quad (1.8)$$

Функция $f_{\tau,\nu}(t)$ неотрицательна и имеет место представление

$$\exp(-\tau\lambda^\nu)=\int_0^\infty \exp(-\lambda t)f_{\tau,\nu}(t)\ dt,\ \tau>0,\ \lambda>0,\ 0<\nu<1. \quad (1.9)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 4 *и* $\alpha<\beta$. *Тогда задача*

$$D^\alpha u(t)=Au(t),\quad t>0, \quad (1.10)$$

$$\lim_{t\to 0}D^{\alpha-1}u(t)=u_0, \quad (1.11)$$

равномерно корректна, и ее разрешающий оператор определяется формулой

$$T_\alpha(t)u_0=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau, \quad (1.12)$$

где $\nu=\alpha/\beta$, *а функция* $f_{\tau,\nu}(t)$ *определяется равенством* (1.7).

Доказательство. Если задача типа Коши (1.3), (1.4) равномерно корректна и Re $\lambda>0$, то, как доказано в [2], λ^β принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для любого $x\in E$ справедливо представление резольвенты $R(\lambda^\beta)=(\lambda^\beta I-A)^{-1}$

$$R(\lambda^\beta)x=\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)T_\beta(t)x\ dt, \quad (1.13)$$

и при этом для всех целых $n\geq 0$

$$\left\|\frac{d^nR(\lambda^\beta)}{d\lambda^n}\right\|\leq\frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{n+\beta}},\quad Re\ \lambda>0. \quad (1.14)$$

В банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона-Никодима, выполнение неравенств (1.14) (даже для действительных $\lambda>0$) является и достаточным условием равномерной корректности задачи (1.3), (1.4). При этом разрешающий оператор имеет вид

$$T_\beta(t)u_0=D^{1-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty}\lambda^{\beta-1}\exp(\lambda t)R(\lambda^\beta)u_0\ d\lambda,\quad \omega_0>0. \quad (1.15)$$

Учитывая представления (1.13), (1.9) и оценку (1.5), при $\nu=\alpha/\beta$ будем иметь

$$R(\mu^\alpha)x=\int_0^\infty\exp(-\mu^\nu t)T_\beta(t)x\ dt=\int_0^\infty T_\beta(t)x\ dt\int_0^\infty\exp(-\tau\mu)f_{t,\nu}(\tau)\ d\tau.$$

Следовательно, в силу (1.8) справедливы неравенства

$$\left\|\frac{d^nR(\mu^\alpha)x}{d\mu^n}\right\|\leq$$

$$\leq M_1\|x\|\int_0^\infty t^{\beta-1}\ dt\int_0^\infty\tau^n\exp(-\tau\mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau\int_0^\infty\exp(\tau s\cos\theta-ts^\nu\cos\nu\theta)\ ds=$$

$$= M_4\|x\| \int_0^\infty \tau^n \exp(-\tau \mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau \int_0^\infty s^{-\alpha} \exp(\tau s \cos\theta)\ ds =$$

$$= M_5\|x\| \int_0^\infty \tau^{n-1+\alpha} \exp(-\tau \mathrm{Re}\ \mu)\ d\tau = \frac{M_6 \Gamma(n+\alpha)\|x\|}{(\mathrm{Re}\ \mu)^{n+\alpha}},$$

что и доказывает равномерную корректность задачи (1.10), (1.11).

Разрешающий оператор этой задачи, в силу представлений (1.15), (1.13) и (1.7) имеет вид

$$T_\alpha(t)u_0 = D^{1-\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1} \exp(\lambda t) R(\lambda^\alpha) u_0\ d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty T_\beta(\tau) u_0 d\tau D_t^{1-\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1} \exp(\lambda t - \lambda^\nu \tau)\ d\lambda = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) T_\beta(\tau) u_0\ d\tau.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В частном случае $\nu = \alpha/\beta = 1/2$ имеем

$$f_{\tau,1/2}(t) = \frac{\tau}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right),$$

и равенство (1.12) принимает вид

$$T_{\beta/2}(t)u_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) T_\beta(\tau) u_0 d\tau.$$

Сформулируем далее доказанную в [7] теорему о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1, *а функция* $D^\beta h(t)$ *принадлежит* $C((0,\infty), E)$ *и абсолютно интегрируема в нуле. Тогда неоднородная задача*

$$D^\beta u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \tag{1.16}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1} u(t) = u_0 \tag{1.17}$$

имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = T_\beta(t)u_0 + \int_0^t T_\beta(t-\xi) h(\xi)\ d\xi. \tag{1.18}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1 – 4 *и* $\alpha < \beta \le 1$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \le \frac{M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \|u_0\| + \frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)} t^{\alpha+\mu-1} +$$

$$+L\ M_1\ M_2 \Gamma(\beta)\ \Gamma(1-\beta\gamma) \big(t^{\alpha+\delta-1}\ E_{\delta,\alpha+\delta}\big(LM_2\ \Gamma(1-\beta\gamma) t^\delta\big)\ \|u_0\| +$$

$$+C_0\ t^{\alpha+\delta} E_{\delta,\alpha+\delta+1}\big(LM_2\ \Gamma(1-\gamma) t^\delta\big) + C_0\ \Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\delta+\mu-1} E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\big(LM_2\ \Gamma(1-$$

$\gamma) t\delta,$

где $\delta = \nu(1-\gamma)$, $E_{\mu,\rho}(\cdot)$ *– функция типа Миттаг-Леффлера.*

Доказательство. Учитывая теоремы 1 и 2, сведем задачу (1.1), (1.2) к интегральному уравнению, которое в силу (1.12), (1.18) запишется в виде

$$u(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0 \ d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,B(s)u(s)) \ d\tau ds, \qquad (1.19)$$

где $u_0,\ T_\beta(\tau)u_0 \in D(A) \subset D$, $\nu = \alpha/\beta$. Обозначив $w(t) = B(t)u(t)$, получим

$$w(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0 \ d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F\big(s,w(s)\big) \, d\tau ds. \quad (1.20)$$

Для решения интегрального уравнения (1.20) применим метод последовательных приближений, положив

$$w_0(t) = 0,$$

$$w_1(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0 \ d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F(s,0) \ d\tau ds,$$

$$w_{n+1}(t) = \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0 \ d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F(s,w_n(s)) \ d\tau ds, \quad n \in N.$$

Используя неравенство (1.6) и условие 3(ii), оценим норму

$$\|w_1(t)\| \le$$
$$\le M_2 \ \|u_0\| \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(s)\tau^{-\gamma} \ d\tau + M_2 \ C_0 \ \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}(1+s^{\mu-1}) \ d\tau ds. \qquad (1.21)$$

Учитывая определение функции $f_{\tau,\nu}(s)$ равенством (1.7), а также интегралы 2.3.4.1, 2.3.3.4 [8], получим

$$\int_0^\infty f_{\xi,\nu}(s)\xi^{-\gamma} \ d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs} \ dz \int_0^\infty \xi^{-\gamma}\exp(-\xi z^\nu) \ d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs}z^{-\nu(1-\gamma)} \ dz = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\beta\gamma))}s^{\nu(1-\gamma)-1}, \quad s > 0. \quad (1.22)$$

Учитывая равенство (1.22), из (1.21) выводим оценку

$$\|w_1(t)\| \le M_2\|u_0\|\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\gamma))}t^{\nu(1-\beta\gamma)-1} + M_2C_0\frac{\Gamma(1-\beta\gamma)t^{\nu(1-\gamma)}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+1)} +$$

$$+M_2C_0\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\mu)t^{\nu(1-\gamma)+\mu-1}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+\mu)} \le \frac{M_2 \ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)}\Big(t^{\delta-1}\|u_0\| + \frac{C_0}{\delta}t^\delta + \frac{C_0\Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)}t^{\delta+\mu-1}\Big).$$

Используя условие 3(iii), аналогично оценим норму разности

$$\|w_2(t) - w_1(t)\| \le \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\big\|B(t)T_\beta(\tau)(F(s,w_1) - F(s,0))\big\| \ d\tau ds \le$$

$$\leq$$

$$\frac{L\ M_2^2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}\left(s^{\delta-1}\|u_0\|+\frac{C_0}{\delta}s^\delta+\frac{C_0\Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)}s^{\delta+\mu-1}\right)\ d\tau ds\leq$$

$$\leq\frac{L\ M_2^2\ \Gamma^2(\delta/\nu)}{\Gamma(2\delta)}\left(t^{2\delta-1}\|u_0\|+\frac{C_0}{2\delta}t^{2\delta}+\frac{C_0\Gamma(2\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\delta+\mu)}t^{2\delta+\mu-1}\right). \qquad (1.23)$$

Учитывая (1.23), для $n\in N$ по индукции получаем

$$\|w_n(t)-w_{n-1}(t)\|\leq\frac{L^{n-1}M_2^n\ \Gamma^n(\delta/\nu)}{\Gamma(n\delta)}\left(t^{n\delta-1}\|u_0\|+\frac{C_0}{n\delta}t^{n\delta}+\frac{C_0\Gamma(n\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(n\delta+\mu)}t^{n\delta+\mu-1}\right). \ (1.24)$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^\infty(w_n(t)-w_{n-1}(t))$ сходится равномерно в любом интервале $[t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$. Поэтому $w_n(t)$ на том же промежутке равномерно сходится к непрерывной на $[t_0,t_1]$ функции $w(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (1.20). В силу (1.24) для нее справедлива оценка

$$\|w(t)\|\leq\sum_{n=1}^\infty\|w_n(t)-w_{n-1}(t)\|\leq\sum_{k=0}^\infty\frac{L^k\ M_2^{k+1}\Gamma^{k+1}(\delta/\nu)}{\Gamma((k+1)\delta)}\quad\times$$

$$\times\quad\left(t^{(k+1)\delta-1}\|u_0\|+\frac{C_0}{(k+1)\delta}t^{(k+1)\delta}+\frac{C_0\ \Gamma((k+1)\delta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)}t^{(k+1)\delta+\mu-1}\right)\leq$$

$$\leq M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\left(t^{\delta-1}\|u_0\|\sum_{k=0}^\infty\frac{L^k\ M_2^k\Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta)}+C_0t^\delta\sum_{k=0}^\infty\frac{L^kM_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+1)}+\right.$$

$$\left.+C_0\Gamma(\mu)\ t^{\delta+\mu-1}\sum_{k=0}^\infty\frac{L^kM_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)}\right)=$$

$$=M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ \left(t^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\|u_0\|+C_0t^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\right.\right.$$
$$\nu)\ t\delta+$$

$$\left.+C_0\Gamma(\mu)t^{\delta+\mu-1}E_{\delta,\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\right), \qquad (1.25)$$

где $E_{\sigma,\rho}(\cdot)$ – функция типа Миттаг-Леффлера, $t\in[t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$.

Поскольку промежуток $[t_0,t_1]$ произвольный, то функция $w(t)$ – непрерывное на $(0,\infty)$ решение уравнения (1.20), удовлетворяющее на $(0,\infty)$ неравенству (1.25), т.е., абсолютно интегрируема в нуле. Более того, из равенства (1.20) и условия 2(ii) мы заключаем, что $D^\alpha w(t)\in C((0,\infty),E)$ и $D^\alpha w(t)$ абсолютно интегрируема в нуле.

Наконец, из равенства (1.19), с помощью теоремы 2, мы получаем решение $u(t)$ задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,w(s))\ d\tau ds,$$

для которого, в силу (1.5), (1.25), (1.22) и условия 3(ii) справедлива оценка

$$\|u(t)\|\leq\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)\left\|T_\beta(\tau)u_0\right\|\ d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\left\|T_\beta(\tau)F(s,0)\right\|\,d\tau ds+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\left\|T_\beta(\tau)(F(s,w(s))-F(s,0)\right\|\,d\tau ds\le$$

$$\le\frac{M_1\ \Gamma(\beta)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|+\frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\ t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)}+$$

$$+\frac{L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ s^\delta\right)\,ds+$$

$$+\frac{C_0\ L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)s^\delta\right)\,ds+$$

$$+\frac{C_0\ L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\delta+\mu-1}E_{\delta,\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)s^\delta\right)\,ds=$$

$$=\frac{M_1\ \Gamma(\beta)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|+\frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\ t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{C_0\ M_1\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)}+$$

$$+L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)\Big(t^{\alpha+\delta-1}E_{\delta,\alpha+\delta}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\|u_0\|+$$

$$\left.\begin{array}{c}+C_0\ t^{\alpha+\delta}E_{\delta,\alpha+\delta+1}\left(L\ M_2\ \Gamma\left(\frac{\delta}{\nu}\right)\ t^\delta\right)+\\ +C_0\ \Gamma(\mu)t^{\alpha+\delta+\mu-1}E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^\delta\right)\end{array}\right),$$

при этом мы использовали равенство

$$I^\alpha\left(t^{\rho-1}\ E_{\sigma,\rho}(ct^\gamma)\right)=t^{\alpha+\rho-1}\ E_{\sigma,\alpha+\rho}(\mathrm{c}t^\gamma),\quad\alpha,\ \rho,\ \gamma>0.$$

Установим далее единственность решения задачи (1.1), (1.2). Пусть имеется другое решение, которое мы обозначим $U(t)$. Тогда в силу теорем 1 и 2

$$U(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,W(s))\ d\tau ds,$$

где $W(t)$ – решение интегрального уравнения (1.20).

Докажем единственность решения этого интегрального уравнения в классе непрерывных на $(0,\infty)$ функций, допускающих оценку

$$\|W(t)\|\le M_0t^{\delta-1}e^{\omega t},\tag{1.26}$$

где $\delta=\nu(1-\beta\gamma)<1$. Отметим, что функции, для которых выполнена оценка (1.25), входят в указанный класс в силу известного (см. [9, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера для $0<\sigma<2$

$$E_{\sigma,\rho}(z)=\frac{1}{\sigma}z^{(1-\rho)/\sigma}\exp\left(z^{1/\sigma}\right)-\sum_{j=1}^n\frac{1}{\Gamma(\rho-\sigma j)\ z^j}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad z\in R,\ z\to+\infty.$$

Пусть $b>0$, $t\in(0,b]$, $\varepsilon_n\to0$, n – достаточно большое натуральное число. Поскольку мы рассматриваем класс функций удовлетворяющий неравенству (1.26), то обозначим через

$$m = \sup_{t\in[0,b]} \left(t^{1-\delta} e^{-nt} ||W(t) - w(t)||\right).$$

Учитывая равенство (1.22), после очевидных преобразований будем иметь

$$\|W(t) - w(t)\| \leq \frac{L\ M_2\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \|W(\mathrm{s}) - w(\mathrm{s})\|\ ds =$$
$$= LM_2\Gamma(1-\gamma)\mathrm{I}^\delta(\|W(t) - w(t)\|).$$

Следовательно,

$$\|W(t) - w(t)\| \leq \frac{L\ M_2\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\delta)} \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1} s^{\delta-1} e^{\omega s}\ ds = LM_2\Gamma(1-\gamma)\mathrm{I}^\delta\left(t^{\delta-1}e^{\omega t}\right).$$

Продолжая этот процесс, придем к неравенству

$$\|W(t) - w(t)\| \leq \frac{L^k {M_2}^k \Gamma^k(1-\gamma) m}{\Gamma(k\delta)} \int\limits_0^t (t-s)^{k\delta-1} s^{\delta-1} e^{\omega s}\ ds \leq$$
$$= \frac{L^k {M_2}^k \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)} t^{(k+1)\delta-1} e^{\omega t} m,$$

откуда, переходя к супремуму, получим

$$m \leq \frac{L^k {M_2}^k \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)} b^{k\delta} m. \tag{1.27}$$

Множитель

$$\frac{L^k {M_2}^k \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma\left((k+1)\delta\right)} b^{k\delta}$$

является общим членом ряда, определяющего функцию Миттаг-Леффлера, поэтому он стремится к нулю. Стало быть из (1.27) получаем

$$m = \sup_{t\in[0,b]} \left(t^{1-\delta} e^{-nt} \|W(t) - w(t)\|\right) = 0,$$

откуда, в силу произвольности $b > 0$, следует $W(t) \equiv w(t)$ при $t > 0$, что и завершает доказательство единственности. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $1 - 3$ *и* $\alpha = \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \leq M_1\ t^{\alpha-1}\|u_0\| + \frac{C_0\ M_1}{\alpha}\ t^\alpha + \frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\ t^{\alpha+\mu-1} +$$
$$+L\ M_1\ M_2\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\gamma)\big(t^{\alpha-\gamma}\ E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+1}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma})\|u_0\| +$$
$$+C_0\ t^{\alpha-\gamma+1} E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+2}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma}) +$$

$$+ C_0\ \Gamma(\mu)\ t^{\alpha-\gamma+\mu} E_{1-\gamma,\alpha-\gamma+\mu+1}(L\ M_2\Gamma(1-\gamma)\ t^{1-\gamma})\Big).$$

Доказательство. Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3, при этом для сведения к интегральному уравнению используется только теорема 2.

Замечание 2. Утверждение теоремы 4 справедливо и при $\alpha = \beta = 1$. В этом случае условие 2(ii) следует заменить следующим требованием: для любого $x \in D$ функция $B(t)x$ принадлежит $C^1([0,\infty), E)$.

Установим теперь теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1), (2) от начальных условий.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и пусть* $u_n(t)$ – *последовательность решений задачи*

$$D^\alpha u_n(t) = Au_n(t) + F(t, B(t)u_n(t)), \quad t > 0, \tag{1.28}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u_n(t) = g_n \in D(A). \tag{1.29}$$

Если $g_n \to u_0 \in D(A)$, $Ag_n \to Au_0$, *и* $B(t)g_n$ *сходится к* $B(t)u_0$ *равномерно по* $t \in (0, b]$ *для любого* $b > 0$, *то последовательность* $u_n(t)$ *решений задачи* (1.28), (1.29) *сходится к решению* $u(t)$ *задачи* (1.1), (1.2) *равномерно по* $t \in [t_0, b]$ *для любых* $0 < t_0 < b$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $U_n(t) = u_n(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g_n$, которая является решением задачи

$$D^\alpha U_n(t) = AU_n(t) + F\left(t, B(t)U_n(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(t)g_n\right) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n, \tag{1.30}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}U_n(t) = 0. \tag{1.31}$$

В силу теорем 1 и 2 функция $U_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, B(s)U_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right)\ d\tau ds.$$

Обозначив $W_n(t) = B(t)U_n(t)$, как и при доказательстве теоремы 3 получим

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right)d\tau ds, \tag{1.32}$$

где $W_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$W_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)\left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)g_n\right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n\right)\ d\tau ds. \tag{1.33}$$

Пусть n, k достаточно большие натуральные числа, $\varepsilon > 0$. Учитывая (1.33), как и при доказательстве неравенства (1.27), получим

$$||W_n(t)-W_k(t)||\leq \frac{L\ M_2\Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\ (t-s)^{\delta-1}\|W_n(s)-W_k(s)\|\ ds+$$

$$+\frac{M_2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}\int_0^t\ (t-s)^{\delta-1}\ s^{\alpha-1}(\|Ag_n-Ag_k\|+L\ \|B(s)g_n-B(s)g_k\|)\ ds,$$

$$m=\sup_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-\omega t}\|W_n(t)-W_k(t)\|\right)\leq M_0m+\varepsilon,\quad M_0<1.$$

Следовательно, $m\leq\frac{\varepsilon}{1-M_0}$, и в силу полноты пространства E последовательность $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W_n(t)$ сходится равномерно по $t\in[0,b]$ к непрерывной на $[0,b]$ функции $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W(t)$. Таким образом, $W_n(t)$ сходится равномерно по $t\in[t_0,b]$, $0<t_0<b$ к функции $W(t)$, которая удовлетворяет неравенству (1.26), в силу условия 2(ii) принадлежит $D(A)$, при этом $AW(t)\in C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.

Из равенства (1.32) вытекает равномерная по $t\in[t_0,b]$ сходимость $U_n(t)$ к функции

$$U(t)=\int_0^t\int_0^\infty\ f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\left(F\left(s,W(s)+\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(s)u_0\right)+\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Au_0\right)\ d\tau ds,$$

которая является решением задачи (1.30), (1.31). Наконец, $u_n(t)$ равномерно по $t\in[t_0,b]$ сходится к функции $u(t)=U(t)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_0$, которая удовлетворяет задаче (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Замечание 3. Утверждение аналогичное утверждению теоремы 5 о непрерывной зависимости решения задачи (1.1), (1.2) от начальных условий справедливо и при $\alpha=\beta\leq 1$.

Отметим также работу [10], в которой теорема о возмущении линейным оператором $B(t)$ доказана для уравнения, содержащего дробную производную Капуто, в предположении что оператор A – генератор аналитической полугруппы и $\beta=1$. Из этой же работы заимствован следующий пример.

Пример. Пусть $E=L_2(R^n)$ и, следовательно, условие 4 выполнено (см. [5, с. 20]). На множестве $D(A)=W_2^{2m}(R^n)$ определим оператор $\mathbf{A}$ следующим образом

$$Au(t,x)=\sum_{|p|=2m}\ a_p(x)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}},$$

где $\sum_{|p|=2m}\ a_p(x)\xi^p\geq(-1)^{m+1}M_0|\xi|^{2m}$ для любых $x,\ \xi\in R^n$ (сильная эллиптичность); коэффициенты $a_p(x)$ при $|p|=2m$ удовлетворяют равномерному в R^n условию Гельдера. Оператор A, таким образом, удовлетворяет условию 1 при $\beta=1$.

Оператор $B(t)$ определим на $D=W_2^{2m-1}(R^n)\supset D(A)$ равенством

$$B(t)u(t,x)=$$
$$\sum_{|p|\leq 2m-1}\ a_p(t,x)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}+\int_\Omega\sum_{|p|\leq 2m-1}\ b_p(t,x,\xi)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,\xi)}{\partial\xi_1^{p_1}\cdots\partial\xi_n^{p_n}}\ d\xi,$$

где $\Omega\subset R^n$; коэффициенты $a_p(t,x)$ при $|p|\leq 2m-1$ и каждом $t\geq 0$ непрерывны, ограничены по $x\in R^n$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $k>\alpha$ по t равномерно по $x\in R^n$; коэффициенты $b_p(t,x,\xi)$ непрерывны,

$$\int_{R^n} \int_{\Omega} \left|b_p(t,x,\xi)\right|^2 \; d\xi dx < +\infty,$$

$$\int_{R^n} \int_{\Omega} \left|b_p(t_2,x,\xi) - b_p(t_1,x,\xi)\right|^2 d\xi dx \le C|t_2 - t_1|^k, \quad \alpha < k \le 1, \; C > 0.$$

Оператор $B(t)$ удовлетворяет условию 2 при некотором $\gamma \in (0,1)$.

Пусть оператор $F(t,w)$ удовлетворяет условию 3. Тогда при $u_0(x) \in W_2^{2m}(R^n)$, в силу теорем 3, 5 задача (1.1), (1.2) корректно поставлена и однозначно разрешима.

Замечание 4. Доказанные утверждения содержат, в частности, результаты о корректной разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + B(t)u(t) + h(t),$$

если функция $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06 - 08 - 96312

Список литературы

1. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными. ДАН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597 - 600.
2. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. № 2. С. 74 - 77.
3. Глушак А.В., Поваляева Ю.В. О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. 2004. V. 14. P. 163 - 172.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.
5. Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel. Boston. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.
6. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.
7. Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2002. № 1. С. 121 - 123.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.
10. El-Borai M.M. Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations. Chaos. Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 433 - 440.

ON A PETRURBATION OF AN ABSTRACT DIFFERENTIAL WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVES BY NONLINEAR OPERATOR

H.K. AWAD, A.V. GLUSHAK

Belgorod State University

e-mail:glushak@bsu.edu.ru

Established that one-valued solvability of Cauchy problem for abstract differential equation contains fractional derivatives by perturbation equation with nonlinear operator.

Key words: equation of fractional order, one-valued solvability of Cauchy problem, subordinate operator.

УДК 519.6:536.2

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННО - КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Е.М. БОГАТОВ

Старооскольский технологический институт
(филиал московского государственного института стали и сплавов)

e-mail: embogatov@inbox.ru

В работе рассматривается плоская нестационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в неоднородной двухфазной среде в черном приближении. При этом газообразная часть среды считается прозрачной для излучения, а расположение компонент связности твёрдой фазы носит фрактальный характер.

На основе методики А.А. Амосова строится полудискретное приближение к описанной задаче, причём искомая функция (температура) - предполагается кусочно-постоянной в каждый момент времени. Для множества, состоящего из треугольников уменьшающегося размера приведён вид аппроксимирующего оператора и начально-краевых условий.

Ключевые слова: теплообмен излучением, неоднородная среда, полудискретное приближение, фрактальная геометрия, параболическая задача, уравнение теплопроводности, двухфазная среда, квазирегулярная сетка

Введение

Вопросы математического описания процессов теплопереноса в неоднородной среде стали объектом пристального внимания ученых с начала 80-х гг. прошлого столетия [1]. Для решения этих вопросов в некоторых модельных ситуациях (бесконечная среда, отсутствие излучения, периодическая структура системы) хорошо подходит метод усреднения [2], [3]. Для описания теплопроводности в конечной периодической одномерной среде с учетом излучения А.А. Амосовым [4] был предложен новый метод, с помощью которого осуществляется переход к полудискретной параболической задаче на сетке с числом узлов, равным числу тел в системе.

В настоящей работе производится развитие указанного метода дискретизации для задач радиационно-кондуктивного теплообмена в двухфазной среде с фрактальным расположением компонент твердой фазы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об определении температуры в замкнутой системе протяжённых цилиндрических тел сечением $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i, n \in N$, разделённых прозрачной средой. Здесь Ω_i- кластер i –го поколения ($\forall\ i \geq 1 \quad \Omega_i = \bigcup_{j\in J} \Omega_{ij}$), состоящий из выпуклых компонент связности одинакового размера, причём

$$\forall(i,\alpha,\beta) \quad \Omega_{i\alpha} = k\Omega_{i-1,\beta}, \tag{1.1}$$

где k – коэффициент подобия.

Будем считать, что тела Ω_{ij} – абсолютно черные, а также, что система Ω помещена во внешнюю излучающую среду с температурой u_c. Тогда математическая модель высокотемпературного нагрева этой системы будет иметь вид

$$c_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} = div\,(\lambda \nabla u)\ , \qquad (x,t) \in \Omega_{ij}\ \times (0,T), \qquad (1.2)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u)\right)(\bar{x}) = \sum_p \int_{l_p} h\big(u(\xi\ ,t)\big)\ \varphi(\xi\ ,\bar{x}) d\sigma(\xi)\ , \qquad (\bar{x},t) \in \partial_I \Omega_{ij}\ \times (0\ ,T), \ (1.3)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u) = h(u_c) \qquad (x,t) \in \partial_e \Omega_{ij}\ \times (0\ ,T), \qquad (1.4)$$

$$u|_{t=0}\ =\ u^0(x)\ , \quad x \in \Omega_{ij}. \qquad (1.5)$$

Здесь $u(x,t)$ - абсолютная температура точки $x \in \Omega_{ij}$, $x = (x_1, x_2)$ в момент времени t; c_V и ρ - удельная теплоемкость и плотность материала, из которого изготовлены тела; λ - коэффициент теплопроводности; $h(u) = \sigma_0\, u^4$ - плотность потока теплового излучения, определяемая по закону Стефана-Больцмана (σ_0 - постоянная Стефана-Больцмана), n - внешняя нормаль к $\partial\Omega_{ij}$, $d\sigma$- элемент длины границы, φ - элементарный угловой коэффициент (определение см., например, в [5]); $\partial_e\Omega_{ij}$ и $\partial_I\Omega_{ij}$- множества точек границы, имеющих и не имеющих контакта с внешней средой соответственно, u_c - температура внешней среды, l_p - границы тел $\Omega_{p\alpha}$ $(p \le i)$, которые полностью или частично видны из точки $\bar{x}$.

Известно, что решение задачи (1.2)-(1.5) существует и единственно в энергетических классах функций (см. [6]).

Отметим, что при k =1 в задачах типа (1.2)-(1.5) с регулярным расположением множеств Ω_{ij} возможен переход к дифференциально-разностному приближению лучистой теплопроводности на равномерной сетке [7].

2. Дискретизация задачи с уточненной геометрией

Будем считать, что k=0,5, n=2; Ω_{ij} - чёрные треугольники, расположенные в соответствии с рис.1 (в центре системы находится Ω_0). Для учета граничных условий дополним Ω "мнимым периметром"- кластером Ω_2', состоящем из треугольников размера Ω_{2j}, присоединенных к Ω таким образом, что одна из их вершин совпадает с вершиной треугольника из семейства Ω_{2j}. Положим температуру во всех телах, составляющих Ω_2' равной u_c (на рис.1 они белые).

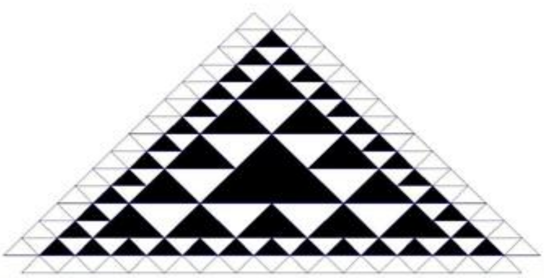

Рис.1

Центры всех треугольников образуют квазиравномерную сетку Ω_a, изображенную на рис.2. Ее границу, соответствующую Ω_2', обозначим через $\partial\Omega_a$. Разрежем Ω_a на 3 равные части по лучам, являющимся продолжением радиусов окружности, описанной около Ω_0. Тогда нумерацию узлов в каждой трети Ω_a можно производить способом, соответствующим рис.3.

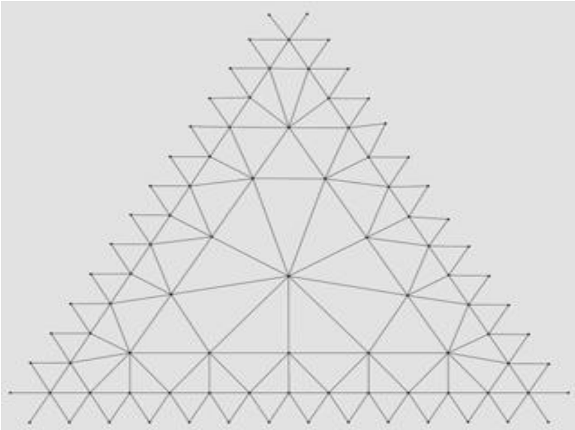

Рис.2

(i_k, j_k)

■

$(i_k - 1, j_k - 1)$ $(i_k - \frac{1}{2}, j_k - 1)$ $(i_k, j_k - 1)$ $(i_k + \frac{1}{2}, j_k - 1)$ $(i_k + 1, j_k - 1)$

■ ■ ■ ■ ■

$(i_k - \frac{1}{4}, j_k - 2)$ $(i_k, j_k - 2)$ $(i_k + \frac{1}{4}, j_k - 2)$

■ ■ ■

Рис.3

Проинтегрируем (1.1) по множеству Ω_{ij}, получим

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} u dx = \int_{\partial\Omega_{ij}} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \qquad (2.1)$$

Разобьем $\partial\Omega_{ij}$ на части γ_{ij}^m по числу компонент связности, на которые он делится касанием с соседними треугольниками.

Проинтегрируем (1.2) по γ_{ij}^m в отдельности и сложим получившиеся равенства, получим

$$\int_{\Omega_{ij}} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_x + \int_{\partial\Omega_{ij}} h(u) d\sigma_x = \sum_{\mathrm{m}} \int_{\gamma_{ij}^m} \left(\sum_p \int_{l_p} h(u(\xi, t)) \varphi(\xi, x)\, d\sigma_\xi \right) d\sigma_x \qquad (2.2)$$

Складывая теперь (2.1) и (2.2), переходим к уравнению теплового баланса

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} u dx + \int_{\partial\Omega_{ij}} h(u) d\sigma_x = \sum_m \sum_p \int_{lp} h(\mathrm{u}) \tilde{\varphi}_{ij}(\xi) d\sigma_\xi, \qquad (2.3)$$

где $\tilde{\varphi}_{ij}(\xi) = \int_{\partial\Omega_{ij}} \varphi(\xi, x) d\sigma_x$.

Будем считать температуру в каждом теле приближенно равной среднему по Ω_{ij} значению:

$$u(x,t) \approx U_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta_i}\int_{\Omega_{ij}} u(x,t)dx\,, \qquad \text{где } \Delta_i = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^{i+1}},\ a \text{ - сторона } \Omega_0.$$

Это позволит нам перейти к полудискретной аппроксимации задачи (1.2) - (1.5) на основе методики, разработанной в [7].

Ранжируем узлы сетки Ω_a следующим образом:

• центральный узел отнесем к нулевому рангу;

• узлы, соответствующие треугольникам, лежащим на осях симметрии Ω_0 отнесем к первому рангу;

• узлы - ближайшие соседи узлов первого ранга, соответствующие треугольникам, входящим в один и тот же кластер, отнесем ко второму рангу;

• узлы, соответствующие кластеру Ω_2' отнесем к четвертому рангу;

• все остальные узлы отнесем к третьему рангу.

В зависимости от ранга узла r $(0 \le r \le 3)$, уравнение (2.3) будет допускать различные аппроксимации.

Узел нулевого ранга обозначим (i_0, j_0). Для него имеем

$$c_v\rho\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{dU_{i_0j_0}}{dt} =$$
$$= \frac{a}{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=i_k-1/2}^{i_k+1/2}\left(\varphi_{i_0j_0,ij}h_{i,j_k-1} + \varphi_{i_0j_0,i_k,j_k-1}h_{i_k,j_k-1}\right) - 6h_{i_0j_0}\right) \qquad (2.4)$$

где $h_{ij} = h(U_{ij})$, а суммирование под знаком второй суммы производится с шагом $1/2$. Кроме того, по свойству угловых коэффициентов [6]

$$\varphi_{i_0j_0,ij} = \frac{1}{a/2}\int_{\gamma_{i_0j_0}}\int_{\gamma_{ij}}\varphi(\xi,x)d\sigma_\xi d\sigma_x = \frac{1}{2}. \qquad (2.5)$$

Таким образом (2.4) можно преобразовать к виду:

$$\bar{c}_0\frac{dU_{i_0j_0}}{dt} = a\Delta_0^a h_{ij}\,, \qquad (2.6)$$

где $\bar{c}_0 = \frac{c_v\rho\sqrt{3}}{2}$, а Δ_0^a- следующая разностная аппроксимация оператора Лапласа

$$\Delta_0^a h_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2}\sum_{i=i_k-1/2}^{i_k+1/2}\left(h_{i,j_k-1} + h_{i_k,j_k+1}\right) - 6h_{i_0j_0}\right)/a^2.$$

Перейдём к узлам первого ранга.

Рассмотрим узел, соответствующий положению $(i_k+1; j_k-1)$, на рис.3, обозначив его (i_I, j_I).

Проделав те же действия, что и для узла (i_0, j_0), будем иметь

$$\bar{c}_i \frac{dU_{i_I j_I}}{dt} = a\Delta_I^a h_{ij}, \quad \Delta_I^a h_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{2} h_{i_k+1/2, j_k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=3/4}^{5/4} h_{i_k+s, j_k-2} - 5h_{i_I j_I}}{(a/2)^2}, \tag{2.7}$$

где $\bar{c}_i = \frac{\bar{c}_{i-1}}{2}\ \forall i \geq 1$, а суммирование по s производится с шагом $\frac{1}{4}$.

Для узла $(i_k+\frac{3}{2}, j_k-2)$ аппроксимация лапласиана Δ_I^a будет выглядеть так :

$$\Delta_I^a h_{ij} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sum_{s=-1/8}^{1/8}\sum_{m=-1/2}^{1/2} h_{i_k+\frac{3}{2}+s, j_k-2+m} + \sum_{l=-1/4}^{1/4} h_{i_k+\frac{3}{2}+l, j_k-2}\right) - 6h_{i_I j_I}}{(a/4)^2}, \tag{2.8}$$

причём шаг по s в равенстве (2.8) равен $1/4$, шаг по l равен $1/2$, шаг по m равен 1.

Рассмотрим узлы 2-го ранга.

Для определенности зафиксируем узел $(\mathrm{i}_k-\frac{1}{2}, j_k-1)$ на рис.3, обозначив его $(i_{II}; j_{II})$.

Аппроксимация уравнения (2.3) примет вид

$$\bar{c}_i \frac{dU_{i_{II} j_{II}}}{dt} = a\Delta_{II}^a h_{ij}, \tag{2.9}$$

$$\Delta_{II}^a h_{ij} = \frac{\frac{1}{2}h_{i_k+1/2, j_k-2} + \left(h_{i_k, j_k} + h_{i_k, j_k-1}\right) + \sum_{k\in K} h_{i_k-1, j_k-1} + \frac{1}{2}\sum_{s=1/4}^{3/4} h_{i_k-s, j_k-2} - 4h_{i_{II} j_{II}}}{(a/2)^2}, \tag{2.10}$$

$K = \{1,3\}$.

По аналогии нетрудно восстановить вид Δ_{II}^a для узлов 2-го ранга, соответствующих кластеру 2-го поколения.

Наконец, для узлов 3-го ранга (к примеру($i_k; j_k-1$)) будем иметь

$$\bar{c}_i \frac{dU_{i_{III} j_{III}}}{dt} = a\Delta_{III}^a h_{ij} \tag{2.11}$$

$$\Delta_{III}^a h_{ij} = \frac{h_{i_k-1/2, j_k-1} + 2h_{i_k, j_k} + h_{i_k+1/2, j_k-1} + \frac{1}{2}\sum_{s=-1/4}^{1/4} h_{i_k+s, j_k-2} - 4h_{i_{III} j_{III}}}{(a/2)^2}. \tag{2.12}$$

Объединяя уравнение (2.8) с системами (2.10)-(2.11), после некоторых преобразований мы приходим к системе

$$\bar{c}_i \frac{dU_{ij}}{dt} = a\Delta^a h_{ij} \qquad x_{ij} \in \Omega_a, \tag{2.13}$$

где Δ^a - конечно-разностная аппроксимация оператора Лапласа на квазиравномерной треугольной сетке.

Отметим, что эта аппроксимация (с точностью до множителя перед значениями функции $h(U)$ в "нецентральных" узлах) совпадает с сеточным аналогом её лапласиана, определённым на Ω_a проекционным методом на базисе из пирамидальных функций (для равномерной сетки этот способ был продемонстрирован в [8]).

Присоединим к (2.12) граничные условия

$$U_{ij} = u_c, \quad x_{ij} \in \partial\Omega_a; \tag{2.14}$$

и начальные значения

$$U_{ij}(0) = U_{ij}^0 = \sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{j=1}^{J_i}\frac{1}{\Delta_i}\int_{\Omega_{ij}} u^0(x)dx/J_i\right)/3. \tag{2.15}$$

Получим полудискретную квазилинейную задачу (2.5)-(2.7), решив которую мы будем иметь значения $U_{ij}(t)$, являющиеся приближением к средним значениям температур треугольных тел Ω_{ij}.

Заключительные замечания.

Указанная схема дискретизации применима к любым замкнутым системам, состоящим из тел выпуклого сечения, для которых выполнено условие (1.1). Изменения будут претерпевать лишь коэффициенты в выражениях для операторов семейства Δ^a. Эти коэффициенты будут зависеть от геометрических инвариантов излучения, получаемых в (2.5). Кроме того, следуя [7], можно показать, что вид уравнения (2.9) не изменится, если допустить в телах наличие полостей с гладкой границей (преобразуется лишь величина $\bar{c}$).

Отметим, что возможен также более точный (но и более трудоёмкий) путь дискретизации задачи (1.2)-(1.5), основанный на галёркинской схеме. При этом в качестве базисных функций выгоднее использовать вейвлеты, отвечающие разным масштабам кластеров [9].

Вопрос об оценке близости решений исходной (1.2)-(1.5) и дискретизированной (2.5)-(2.20) задач выходит за рамки данной статьи. Его можно исследовать методами, предложенными в [4].

Автор выражает признательность профессору А.А. Амосову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-08-96312

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Осреднение процесса передачи тепла при наличии излучения // Дифференц. уравнения, 1981. Т.17, № 10. с. 1765-1773.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднения дифференциальных операторов.- М., Наука, 1993. 464 с.
3. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. - 376 с.
4. Амосов А.А. Полудискретные и асимптотические приближения к решению задачи переноса тепла в системе экранов при наличии излучения // Сб. трудов XII Всеросс. школы-семинара ``Современные проблемы математического моделирования'', Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ,2007. С.8-21.
5. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
6. Амосов А.А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. уравнения, 2005, Т.41, №1, с. 93-104
7. Амосов А. А., Богатов Е. М., Савина Ю. В. Полудискретное приближение к задаче нагрева излучением периодической системы труб // Математические методы в технике и технологиях. Сб. трудов XXI Международ. науч. конф.: в 10 т. Т.1 Секция 1/ под общ. ред. В.С.Балакирева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. с.100-102

8. Макаров В.Л., Макаров С.В О точности разностных схем для квазилинейных эллиптических уравнений в ромбе с решениями из класса $W_2^k(\Omega)$ // Дифференц. уравнения, 1993, Т. 29, № 7, С.1216-1221.
9. Алтайский М.В., Крылов В.А. Вейвлет-галёркинские методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением параллельных алгоритмов // Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика. 2002, № 1, с. 98-106.

NUMERICAL METHOD OF A SOLVING OF THE RADIANT-CONDUCTIVE HEAT EXCHANGE PROBLEM IN THE FRACTAL GEOMETRY MEDIUM

E.M. BOGATOV

Starooskolsky Technology Institute of Moscow State Institute of Steels and Alloys

e-mail: embogatov@inbox.ru

A plane problem of the radiation-conductive heat transfer in the black approximation in the heterogeneous two-phase medium is considered. A gaseous medium is accepted as transparent and the disposition of a hard phase connectedness components has a fractal character here.

A half- discrete approximation to this problem basing on A.A.Amosov method is constructed (searching function replace by piecewise constant in the each moment of time function). A view of the approximation operator and initial boundary value problem is given for the set consists of decreasing size triangles.

Key words: thermal radiation, heterogeneous medium, half- discrete approximation, fractal geometry, parabolic problem, heat equation, two-phase medium, quasi-regular net

УДК 539.2

ФИНАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ САМОПОДОБНОМ МЕХАНИЗМЕ ДРОБЛЕНИЯ

Р.Е. БРОДСКИЙ[1], Ю.П. ВИРЧЕНКО[2]

[1]*Институт монокристаллов НАНУ*
[2]*Белгородский государственный университет*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

В рамках физического представления о медленной фрагментации твердотельной среды и на основе предложенного А.Н.Колмогоровым однопараметрического описания систем фрагментации, строится математическая модель фрагментации с самоподобным механизмом дробления и с учётом законов сохранения энергии и вещества в системе. В условиях масштабной инвариантности, эта модель приводит асимптотически, при неограниченном продолжении эволюции, к классическому логарифмически нормальному распределению. В общем случае, при ненулевом показателе β самоподобия, получено уравнение для финальной плотности распределения, которое исследовано в простейшем частном случае $\beta = 2$ и, в этом случае, оно даёт плотность распределения со степенным $\propto r^{-5}$ убыванием по размерам r.

Ключевые слова: фрагментация, самоподобие, финальные распределения

Статистическая теория фрагментации твердотельных материалов берёт своё начало с классической работы А.Н.Колмогорова[1]. В ней было предложено описывать состояния каждого из фрагментов системы посредством одного параметра - обобщённого размера r и, в рамках простых и очень прозрачных предположений, была построена вероятностная модель, описывающая эволюцию системы в дискретной шкале времени. На её основе, было найдено финальное распределение вероятностей для случайных размеров фрагментов в виде логарифмически нормального распределения. Одним из существенных предположений Колмогорова является масштабная инвариатность механизма дробления, которая состоит в неизменности эволюционного уравнения при замене $\lambda r \Rightarrow r$. В дальнейшем, модель Колмогорова получила развитие в различных направлениях (см., например, [2],[3]), с точки зрения исследования родственных вероятностных моделей. Однако, было отмечен ещё один существенный её недостаток [4], она не учитывает законов сохранения энергии и вещества в процессе фрагментации. В последней работе был намечен путь преодоления этого недостатка. Необходимо также отметить, что Колмогоровым был исследован только случай масштабно инвариантного дробления, в то время как дальнейшее развитие статистической физики потребовало изучения так называемых фрактальных структур [5] и, поэтому, стало актуальным изучение, в рамках статистической теории фрагментации, механизмов дробления, которые не обладают масштабной инвариантностью, а, наборот, как это принято в теории фракталов, обладают свойством самоподобия при изменении масштаба (см., например, [6] - [8]). Поэтому, несмотря на то, что в последнее время приобрёл популярность подход к изучению динамики фрагментации на основе стохастической геометрии [7], [9], возникла необходимость исследования класса финальных распределений вероятностей для математических моделей фрагментации, обладающих свойством самоподобия, в рамках традиционного однопараметрического подхода. Это связано, прежде всего с тем, что результаты, полученные в рамках такого подхода, непосредственно приложимы к обработке статистических данных, связанных с физическими системами фрагментации. Поиску финальных распределений, в условиях самподобия механизма дробления, посвящена настоящая работа, в которой, помимо этого, преодолевается основной недостаток работы [1], то есть производится учёт основных законов сохранения. Здесь мы показываем, что, при реализации так называемого режима медленной фрагментации, когда имеется возможность описания эволюции на основе диффузионного уравнения для плотности $g(r,t)$ числа фрагментов по размерам, возникает распределение вероятностей с степенной, в отличие от колмогоровского режима, асимптотикой в области больших размеров. Этот результат существенно также отличается от распределения, полученного также в случае масштабно неинвариантного дробления, когда аналогичная асимптотика является экспоненциальной [10] - [12].

1. Диффузионное описание медленной фрагментации

В этом разделе мы сформулируем проблему исследования эволюционного процесса так называемой медленной фрагментации. Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Пусть $g(r,t)$ – плотность распределения конечной положительной меры на R_+. С физической точки зрения, мера представляет собой среднее число фрагментов с размерами не по размерам. В рамках теории медленной фрагментации, в предположении, что, в неизменных внешних условиях протекания процесса, устанавливается автономный эволюционный режим, эта плотность является решением диффузионного уравнения

$$\dot{g}(r,t) = c(r)g(r,t) + \frac{\partial}{\partial r}[a(r)g(r,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r)g(r,t)]\,, \qquad (1.1)$$

у которого коэффициенты $c(r)$ – распределённая интенсивность рождения фрагментов и $b^2(r)$ – коэффициент диффузии положительны. При этом $c(r)$ предполагается интегрируемой в окрестности нуля и ограниченной на R_+ за пределами этой окрестности.

Плотность $g(r,t)$, согласно конструкции математической модели медленной фрагментации, должна удовлетворять условиям сохранения объёма и энергии, которые записываются, соответственно, в виде

$$\int_0^\infty r^3 g(r,t)dr = \text{const}\,, \quad \int_0^\infty r^2 g(r,t)dr = \text{const}\,. \qquad (1.2)$$

Задача состоит в вычислении асимптотики финальной плотности распределения $f(r,t) = g(r,t)/N(t)$ при $t \to \infty$, где $N(t) = N(\infty,t)$ – среднее число всех фрагментов в системе фрагментации.

Дифференцированием по t обеих частей первого из равенств (1.2),

$$\int_0^\infty r^3 \dot{g}(r,t)dr = 0\,,$$

после подстановки выражения для производной, следующего из уравнения (1.1), получаем

$$\int_0^\infty r^3 \left[c(r)g(r,t) + \frac{\partial}{\partial r}[a(r)g(r,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r)g(r,t)] \right] dr = 0\,.$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемые в этом равенстве, находим

$$\int_0^\infty [r^3 c(r) - 3r^2 a(r) + 3rb^2(r)] g(r,t) dr = 0\,.$$

Ввиду независимости коэффициентов $a(r)$ и $b^2(r)$ от произвольной плотности $g(r,t)$, из последнего равенства, следует уравнение

$$r^2 c(r) - 3ra(r) + 3b^2(r) = 0\,. \qquad (1.3)$$

Точно также рассуждая, получим условие на коэффициенты $c(r)$, $a(r)$, $b^2(r)$, следующее из второго равенства (1.2),

$$r^2 c(r) - 2ra(r) + b^2(r) = 0\,. \qquad (1.4)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) приводят к следующим связям между коэффициентами $a(r)$ и $b^2(r)$ и распределённой интенсивностью рождения фрагментов.

$$b^2(r) = \frac{1}{3} r^2 c(r)\,, \quad a(r,t) = \frac{2}{3} rc(r)\,. \qquad (1.5)$$

Подставив выражения (1.5) для коэффициентов $a(r)$ и $b^2(r)$ в уравнение (1.1), мы приходим к следующему уравнению, описывающему процесс медленной фрагментации

$$\dot{g}(r,t) = c(r)g(r,t) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rc(r)g(r,t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2 c(r)g(r,t)]\,. \qquad (1.6)$$

С целью изучения финального поведения решений этого уравнения, выделим два класса функций $c(r)$, для которых реализуется тип эволюции, который назван нами самоподобным. К первому классу отнесём $c(r) \to c_0 > 0$ при $r \to +0$, а второй класс характеризуется функциями $c(r)$, которые обладают, при тех же условиях, асимптотическим поведением $c(r) = c_0 r^\beta (1 + o(1))$, где показатель $\beta > 0$ мы называём показателем самоподобия дробления фрагментов. Для функций первого класса, показатель самоподобия $\beta = 0$, но мы их выделяем в отдельный класс, так как, для таких интенсивностей рождения фрагментов, реализуется принципиально иной тип финального поведения, по сравнению с моделями, у которых $\beta > 0$.

2. Колмогоровский режим медленной фрагментации

В этом разделе мы покажем, что для функции $c(r)$ первого из указанных выше типов реализуется колмогоровское финальное распределение. Введём функцию $h(x,s)$ при $x > 0$, согласно формуле

$$h(x,t) = \lambda(t) f(\lambda(t)x, t)\,, \qquad (2.1)$$

где $f(r,t)$ – плотность распределения вероятностей $f(r,t) = g(r,t)/N(t)$ и введена подходящая функция $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$, которая будет определена позже. Подставляя выражения (2.1) в уравнение (1.6), умножив на $\lambda(t)$ и совершая замену переменной $r/\lambda(t) = x$, получим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) - \left(\frac{d}{dt} \ln\lambda(t)\right)[h(x,t) + xh'(x,t)] =$$

$$= [c(\lambda(t)x) - 1]h(x,t) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}[xc(\lambda(t)x)h(x,t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^2 c(\lambda(t)x)h(x,t)],$$

где штрих обозначает частную производную функции $h(x,t)$ по первому аргументу функции $h(x,t)$. Из этого уравнения следует, что, для существования финального поведения решения $h(x,t)$ при $t \to \infty$, необходимо существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \ln\lambda(t) = -ù\,, \quad ù \geq 0\,. \tag{2.2}$$

Поэтому функцию $\lambda(t)$, в полученном уравнении, выбираем следующим образом

$$\lambda(t) = e^{-ùt}\,, \quad \lambda(0) = 1\,.$$

Учитывая, что

$$\lim_{t\to\infty} c(\lambda(t)x) = c_0\,,$$

находим уравнение, определяющее финальную плотность распределения

$$c_0^{-1}\dot{h}(x,t) = (2/3 - ù)[xh(x,t)] + \frac{1}{6}[x^2 h(x,t)]\,. \tag{2.3}$$

Оно решается точно сведением к уравнению на $\mathbf{R}$ с постоянными коэффициентами посредством замены независимой переменной $y = \ln x$, которое, в свою очередь, решается стандартным образом при естественных для плотности $h(e^y,t)$ распределения вероятностей граничных условиях $h(e^y,t) \to 0$, $y \to \pm\infty$. В результате, получим

$$h(x,t) = x^{-1}\sqrt{\frac{3}{2\pi c_0 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{3[\ln(xe^{c_0 t(5/6-ù)}/x')]^2}{2c_0 t}\right) h(x',0)dx' \tag{2.4}$$

Соответственно, финальная при $t \to \infty$ плотность распределения вероятностей по размерам фрагментов определяется формулой

$$f(r,t) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{2\pi c_0 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5c_0 t/6}/r')]^2}{2c_0 t}\right) f(r',0)dr'\,. \tag{2.5}$$

Если $f(r,0) = \delta(r - r_0)$, что, с физической точки зрения означает, что фрагментация начинается с цельного образца с размером r_0, то формула (2.5) принимает колмогоровский вид [1].

3. Масштабно неинвариантные процессы медленной фрагментации

В этом разделе мы рассмотрим второй, из выделенных нами классов процессов медленной фрагментации. В этом случае, финальный этап эволюции системы фрагментации должен описываться масштабно неинвариантными плотностями распределения. Это связано с тем, что получающееся эволюционное уравнение (9), которому удовлетворяет финальная плотность распределения, неинвариантна относительно преобразования $r \Rightarrow \lambda r$.

При отличном от нуля показателе самоподобия β, введём величину $r_* = c_0^{-1/\beta}$ и положим $c(r) = (r/r_*)^\beta(1 + o(1))$. В этом разделе, мы получим общее уравнение, решениями которого являются финальные плотности распределения в описанной выше ситуации самоподобного механизма дробления и, далее, вычислим финальную плотность распределения в частном случае, когда $\beta = 2$. В дальнейшем, удобно, начиная с этого места, во всех вычислениях, пользоваться безразмерными переменными r, которые получаются в результате замены $r/r_* \Rightarrow r$, то есть считать, что $c(r) = r^\beta(1 + o(1))$. В конце же вычислений, в найденной финальной плотности распределения $g(r,t)$, мы произведём обратную замену $r \Rightarrow r/r_*$.

Совершив в уравнении (1.6) подстановку

$$g(r,t) = \lambda^{-1}(t)h(r/\lambda(t),t)$$

с функцией $\lambda(t)$, стремящейся к нулю при $t \to \infty$, и умножив, далее, на $\lambda(t)$ с заменой переменной $r/\lambda(t) = x \in R_+$, получаем уравнение в терминах обозначений, использованным в предыдущем разделе

$$\dot{h}(x,t) - \left(\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t)\right)[h(x,t) + xh'(x,t)] =$$

$$= c(\lambda(t)x)h(x,t) + \frac{2}{3}\,[xc(\lambda(t)x)h(x,t)] + \frac{1}{6}\,[x^2c(\lambda(t)x)h(x,t)]\,.$$

Так как $\lambda(t)$ стремится к нулю, то, для исследования асимптотики решения этого уравнения при $t \to \infty$, достаточно решить уравнение, которое получается подстановкой асимптотического соотношения $c(r) = r^\beta(1 + o(1))$,

$$\dot{h}(x,t) - \left(\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t)\right)[xh(x,t)] =$$

$$= \lambda^\beta(t)x^\beta h(x,t) + \frac{2}{3}\lambda^\beta(t)\left[x^{\beta+1}h(x,t)\right] + \frac{1}{6}\lambda^\beta(t)\left[x^{\beta+2}h(x,t)\right]. \quad (3.1)$$

Для построения требуемого решения, нужно выделить, в обеих частях этого уравнения, члены главного порядка по t при $t \to \infty$. При этом, если эта группа членов не содержит производную по t, то соответствующая финальная плотность распределения является стационарным решением уравнения (3.1). Если же член с производной по t несёт на себе главный порядок по t, а члены в правой части равенства порядка $\lambda^\beta(t)$ являются членами меньшего порядка малости, то получающееся эволюционное уравнение превращается в дифференциальное уравнение первого порядка, решения которого не обладают интересным асимптотическим поведением. Поэтому, мы будем исследовать случай, когда асимптотическое поведение членов в правой части, имеющих один и тот же порядок малости, совпадает с асимптотическим поведением производной по t в левой части. В связи с этим, положим

$$\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\grave{u}\lambda^{\beta}(t)\,. \qquad (3.2)$$

где $\grave{u} \geq 0$. Так как, по предположению, $\lambda(t)$ – убывающая функция от t, то $\grave{u} > 0$. Однако, случай $\grave{u} = 0$ мы также будем анализировать, так как он соответствует указанному выше положению, когда второй член в левой части уравнения (3.1) имеет порядок $o(\lambda^{\beta}(t))$ и им можно пренебречь. Определим $\lambda(t)$ таким образом, чтобы $\lambda(0) = 1$. В этом случае, решением дифференциального уравнения (3.3) является

$$\lambda(t) = (1 + \beta\grave{u}t)^{-1/\beta}\,. \qquad (3.3)$$

Используя уравнение (3.2), представим уравнение (3.1) в виде

$$\dot{h}(x,t) + \grave{u}\lambda^{\beta}(t)[xh(x,t)] =$$

$$= \lambda^{\beta}(t)\left(x^{\beta}h(x,t) + \frac{2}{3}\left[x^{\beta+1}h(x,t)\right] + \frac{1}{6}\left[x^{\beta+2}h(x,t)\right]\right). \qquad (3.4)$$

Заметим, что величина

$$\int_0^{\infty}\lambda^{\beta}(s)ds = \infty$$

и, поэтому, исключив явную зависимость от времени в (3.4), посредством введения новой временно′й переменной s с дифференциалом $ds = \lambda^{\beta}(t)dt$, которая принимает сколь угодно большие значения, можно изучать финальное поведение плотности распределения $h(x,t)$ в терминах этой новой временно′й шкалы. В результате, изучаемое нами уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}h(x,s) + \grave{u}[xh(x,s)] =$$

$$= x^{\beta}h(x,s) + \frac{2}{3}\left[x^{\beta+1}h(x,s)\right] + \frac{1}{6}\left[x^{\beta+2}h(x,s)\right], \qquad (3.5)$$

где $h(x,s)$ обозначает, на самом деле, функцию $h(x,t(s))$.

Приведём уравнение (3.5) к более компактному виду. С этой целью, введём новую функцию $u(y,s)$ согласно формуле $u(y,s) = e^{y+\grave{u}s}h(e^{y+\grave{u}s},s)$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}u(y,s) =$$

$$= \frac{1}{6}e^{\beta(y+\grave{u}s)}\left([\beta^2 + 5\beta + 6]u(y,s) + [2\beta + 5]\frac{\partial}{\partial y}u(y,s) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(y,s)\right).$$

Далее, положим $u(y,s) = e^{-(2+\beta)y}v(y,s)$. Следовательно, функция $v(y,s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}v(y,s) = \frac{1}{6}e^{\beta(y+ùs)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y,s) + \frac{\partial}{\partial y}v(y,s)\right). \quad (3.6)$$

Заменив независимую переменную $z = e^{-\beta y/2} \in R_+$ так, что $v(y,s) = w(z,s)$, получим уравнение для функции $w(z,s)$ Подстановка этих выражений и переход к новой шкале времени $s \Rightarrow \tau$, $d\tau = \beta^2 e^{\beta ùs}ds/12 = \beta^2 dt/12$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}w(z,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}w(z,\tau) + [1 - 2/\beta](2z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}w(z,\tau)\,, \quad (3.7)$$

где, как и выше, введено переобозначение $w(z,s(\tau)) \Rightarrow w(z,\tau)$.

Требование интегрируемости плотности $g(r,t)$ в окрестности точки $r = 0$ приводит к необходимому ограничению $rg(r,t) \to 0$ при $r \to 0$, а требование существования третьего момента, вместе со свойством убывания плотности, приводит, с необходимостью, к ограничению $r^4 g(r,t) \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда следует, что $z^{2(1+2\beta^{-1})}w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$ и $z^{2(1-\beta^{-1})}w(z,\tau) \to 0$ при $z \to 0$.

4. Случай $\beta = 2$

В этом разделе мы вычислим, в частном случае при $\beta = 2$, финальную плотность распределения вероятностей, удовлетворяющую уравнению (3.7), и указанным выше граничным условиям. При $\beta = 2$ уравнение (3.7) упрощается и его решение выражается в терминах элементарных функций

$$\frac{\partial}{\partial \tau}w(z,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}w(z,\tau)\,, \quad z \in R_+\,. \quad (4.1)$$

Граничные условия для искомой функции при $\beta = 2$ приводят к требованиям $z^4 w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$ и $w(z,\tau) \to 0$ при $z \to 0$. Мы будем решать задачу с менее жёстким первым граничным условием $w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$, что позволяет сделать возникающую краевую задачу самосопряжённой в $L_2(R_+)$. Решение этой краевой задачи с заданным начальным условием $w(z,0)$ имеет вид

$$w(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\tau^3}}\int_0^\infty G(z,z';\tau)w(z',0)dz'\,, \quad (4.2)$$

где введено обозначение

$$G(z,z';\tau) = |z'-z|\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{2\tau}\right) + (z+z')\exp\left(-\frac{(z+z')^2}{2\tau}\right). \quad (4.3)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, найдём, на основе полученного решения, явный вид плотности распределения $h(x,s)$

$$h(r,t) = \frac{e^{4\aleph\tau}}{\sqrt{8\pi\tau^3}}\int_0^\infty \left(\frac{x}{x'}\right)^5 r'^3 G(x^{-1}e^{\aleph s}, x'^{-1};\tau)h(x',0)\frac{dx'}{x'^2}\,.$$

а затем и плотности распределения $g(r,t)$ числа фрагментов по размерам

$$g(r,t) = \frac{r^{-5}}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}}\int_0^\infty r'^3 G(r^{-1}, r'^{-1}; t/3)g(r',0)dr'\,. \quad (4.4)$$

Для получения окончательной формулы, необходимо произвести замену переменной размера согласно $r \Rightarrow r/r_*$. В этом случае, формула (4.4) принимает вид

$$g(r,t) = \frac{(r/r_*)^{-5}}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} \int_0^\infty r'^3 G(r_*/r, r_*/r'; t/3) g(r',0) d(r'/r_*)\ .$$

Точно также как и в предыдущем разделе, рассмотрим важный случай, когда фрагментация начинается с одного образца, имеющего размер r_0. В этом случае, $g(r,0) = \delta(r - r_0)$. Тогда формула (4.5) приводит к финальной плотности распределения

$$g(r,t) = \frac{r_0^3 r_*}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} r^{-5} G(r_*/r, r_*/r_0; t/3)\ . \qquad (4.5)$$

Наконец, учтём, что, в течение эволюции, размеры всех фрагментов становятся много меньшими первоначального размера r_0, то есть плотность $g(r,t)$ должна быть сосредоточена в области значений r, много меньших r_0. Поэтому, в этой формуле, достаточно ограничиться асимптотикой при $r_0 \to \infty$. В результате, получим асимптотическое выражение финальной плотности $g(r,t)$ в виде

$$g(r,t) = \frac{r_0^3 r_*}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} r^{-5} G(r_*/r, 0; t/3) =$$

$$= N(t)\ \left[\frac{3}{\sqrt{8\pi}} \frac{\Lambda^5(t)}{r^6} \exp\left(-\frac{\Lambda^2(t)}{2r^2}\right)\right], \qquad (4.6)$$

где

$$N(t) = \frac{t}{2}(r_0/r_*)^3\ , \quad \Lambda(t) = r_*(3/t)^{1/2}\ . \qquad (4.7)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках в (4.6) нормировано на единицу, то есть оно представляет собой финальную плотность распределения $f(r,t)$ вероятностей по размерам фрагментов, а $N(t)$ представляет полное число фрагментов в момент времени. При этом величина $\Lambda(t)$ определяет средний размер фрагментов

$$\rho(t) = \int_0^\infty r f(r,t) dr = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \Lambda(t)\ .$$

Список литературы

1. Колмогоров А.Н., О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. – 1941. – Т.31. – 242 2. – С.99-101.
2. Филиппов А.Ф. О распределении размеров частиц при дроблении // Теория вероят. и её применен. – 1961. – Т.6. – 242. 3. – P.299 - 318.
3. Epstein B. The mathematical description of certain breakage mechanisms leading to the logarithmico-normal distribution // J.Franclin Inst. – 1947. – V.244. – 242 6. – P.471-477.
4. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В., Формирование и универсальные свойства распределений по размерам в теории дробления // ДАН СССР. – 1987. – Т.294. – 242 5. – P.1105-1110.
5. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254с.
6. Cheng Z., Redner S. Kinetics of Fragmentation // J.Phys.A. – 1990. – V.23. – 242 7. – P.1233-1258.

7. Krapivsky P.L., Ben-Naim E. Scaling and Multiscaling in Models of Fragmentation // Phys.Rev. E. – 1994. – V.50. – 242 5. – P.3502-3507.
8. Krapivsky P.L., Grosse I., Ben-Naim E. Scale invariance and Lack of Self-Averaging in Fragmentation // Phys.Rev. E. – 2000. – V. 61. – P.R993-R996.
9. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // Теор. и мат. физика. – 2001.– Т.128. – 242 2. – С.161-177.
10. Brodskii R.E., Virchenko Yu.P. Investigation of the kinetic equation of cascade fragmentation theory at not self-similar subdivision // ArXiv 0808.1214v2. – 2008.
11. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Absract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.
12. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. Investigation of the Final Evolution of the Random Fragmentation Processes. "Kolmogorov and Contemporary Mathematics". Abastracts. June 16-21,2003. – Moscow. MGU. – P.582.

THE FINAL PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF RANDOM SIZES AT SELF-SIMILAR SUBDIVISION MECHANISM

R.E. BRODSKII[1], YU.P. VIRCHENKO[2]

[1]*Single Crystal Institute of NASU*
[2]*Belgorod State University*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

In frameworks of physical presentation of the slow fragmentation of solid media and on the basis of one-parametrical description of fragmentation system states proposed by A.N.Kolmogorov, the mathematical model of fragmentation with the self-similar subdivision mechanism and with the account of the energy and matter conservation laws in the system is built. At the case of the scale invariance, this model gives asymptotically to the classic log-normal distribution at the unbounded continuation of the evolution. In general case, at the nonzero self-similarity power β, the equation for the final distribution density is obtained which is investigated at the simplest particular case $\beta = 2$ when it gives the distribution density with the power $\propto r^{-6}$ decreasing on sizes r.

Key words: fragmentation, self-similarity, final distributions

УДК 517.956

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО СМЕШАННО-СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ОТРАЖЕНИЕМ

М.В. БУРЦЕВ, А.Н. ЗАРУБИН

Орловский государственный университет

e-mail: burtsevmv@orel.ru

Рассмотрена начально- краевая задача для смешанно- составного уравнения с запаздывающим аргументом и отражением. Кроме того, уравнение содержит дробные производные в смысле Римана-Лиувилля. При некоторых предположениях установлена однозначная разрешимость этой задачи.

Ключевые слова: Дробное исчисление, уравнение смешанно-составного типа, отражение, обобщенная функция Миттаг-Леффлера, оператор дробного интегродифференцирования

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^- = D_1^- \cup D_2^-$, $D_1^- = \{(x,t): x > 0, -x < t < 0\}$, $D_2^- = \{(x,t): x < 0, x < t < 0\}$; $D^+ = \{(x,t): |x| < +\infty, t > 0\}$;$J = \{(x,t): |x| < +\infty, t = 0\}$, рассматривается уравнение смешанно-составного типа

$$FLU(x,t) = 0, \tag{1.1}$$

в котором

$$F \equiv H(t)(D_{0x}^{\beta} + \gamma) + H(-t),$$

$$LU(x,t) \equiv U_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha H(t)+2H(-t)}U(x,t) - H(t)U(x-\tau,t) - H(-t-h)U(-x,t+h);$$

где $0 < \alpha < 1$; $n-1 < \beta < n$ $(n \in N)$; $0 < \gamma, \tau \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; D_{0t}^{α} - оператор дробного [1,с.9](в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования

$$D_{0t}^{\alpha}U(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\xi)^{-\alpha}U(x,\xi)d\xi.$$

Интегрированием уравнеия (1.1) по переменной x при $t > 0$ получено неоднородное уравнение

$$LU(x,t) = H(t)\sum_{t=l}^{n} C_l(t)x^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma x^{\beta}), \tag{1.2}$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} -$$

- обобщенная функция Миттаг-Леффлера [2, с.45], $(\rho)_k$ – символ Похгаммера [3, с.719]; $\Gamma(t)$ – гамма-функция [3, с.720], для которого исследуется обратная Задача R.

Задача R. *Найти функции* $C_l(t)$, $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l=\overline{1,n})$ *и решение* $U(x,t)$ *уравнения (1.2) в области* D *из класса* $D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) \in C(\overline{D}^+)$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,t) \in C(D^+ \cup J)$, $U(x,t) \in C(\overline{D}^-)$, $U_{xx}(x,t) \in C(D^+ \cup D^-)$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^-)$, *удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$U(x,t)|_{t=(-1)^i x} = \psi_i(x),\ (-1)^i x \le 0\ \ (i=1,2); \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\beta-j}U(x,t) = \varphi_j(t),\ t \ge 0\ \ (j=\overline{1,n});) \tag{1.4}$$

условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}U(x,t) = \lim_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x), x \in J; \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}U(x,t) = \lim_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x), x \in J \tag{1.6}$$

где $\psi_i(x)$ $(i=1,2)$ - заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, $D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(t) \in C[0,+\infty)$, $\varphi_j(+\infty)=0$ $(j=\overline{1,n})$; $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_i((-1)^{i+1}\infty)=0$ $(i=1,2)$.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть функция* $\omega(x)$ *непрерывна и абсолютно интегрируема на* $(-\infty,+\infty)$ *вместе со своими производными;* $\omega(\pm\infty)=0$; $D_{0t}^{\alpha-1}C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l=\overline{1,n})$.

Тогда существует единственное решение $U(x,t)$ в области D^+ задачи Коши (1.2), (1.5), стремящееся к нулю при $x^2+t^2 \to +\infty$ $(|x|<+\infty, t>0)$, представимое в форме

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\xi)G(x,\xi,t)d\xi - \sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma\xi^{\beta})G(x,\xi,t-\eta)d\xi, \tag{1.7}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m I_m(\lambda,t)e^{i\lambda(x-m\tau-\xi)}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{t^{\alpha(m+1)-1}}{x-m\tau-\xi}H_{12}^{20}(\frac{(x-m\tau-\xi)^2}{4t^{\alpha}}$$

- фундаментальное решение задачи Коши (1.2), (1.5), а

$$I_m(\lambda,t) = t^{\alpha(m+1)-1}E_{\alpha,\alpha(m+1)}^{m+1}(-\lambda^2 t^{\alpha})\ \ (m=0,1,2,\dots),$$

$H_{pq}^{mn}(t$ - функция Фокса [4, с.626].

На основании условия сопряжения (1.6) и решения (1.7) задачи Коши (1.2), (1.5) получим функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на $t=0$, $|x|<+\infty$ из области D^+:

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega''(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega(x-\tau),\ |x|<+\infty. \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\omega(x) \in C^2(-\infty,+\infty);\nu(x) \in C(-\infty,+\infty);\omega(\pm\infty) = 0.$

Тогда существует единственное регулярное решение $U(x,t)$ в области D^- задачи Коши (1.2), (1.5)-(1.6) и оно имеет вид

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\omega(x-\mathrm{t}) + \omega(x+t)]H(-t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m(-t-mh)H(-t-mh)\int_0^{-t-mh} ((-t-mh)^2-\eta^2)^{m-1} \times$$

$$\times [\omega((-1)^m x+\eta) + \omega((-1)^m x-\eta)]d\eta - \frac{H(-t)}{2}\int_{x+t}^{x-t} \nu(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\gamma_m H(-t-$$
$$mh)\int_0^{-t-mh} \eta((-t-mh)^2-\eta^2)d\eta\int_{x-\eta}^{x+\eta} \nu((-1)^m\xi)d\xi,$$

где $\gamma_m = (m!\,\Gamma(m)2^{2m-1})^{-1}$.

На основании условий (1.3) и решения задачи Коши (1.2), (1.5)-(1.6) найдем функциональное соотношения между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из D^- на $t = 0\ \ (|x| < +\infty)$ в виде

$$\nu(x) = \omega'(x) + \mu_{1l}(x),\ lh \le x \le (l+1)h; \qquad (1.9)$$

$$\nu(x) = -\omega'(x) = \mu_{2l}(x),\ -(l+1)h \le x \le -lh; \qquad (1.10)$$

$(l = 0,1,2,\ldots)$, где

$$\mu_{1l}(x) =$$
$$-\psi_{1'}\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma_1\left(\frac{x}{2}-h\right)\omega(-x+h)H(x-h) - \frac{1}{2}\gamma_1 H(x-h)\int_{-x+h}^{-h} \omega(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{l} (-1)^m\gamma_m H(x-mh)\int_{((-1)^m-1)\frac{x}{2}+mh}^{((-1)^m+1)\frac{x}{2}-mh} \left[(1+(-1)^m)\frac{x}{2}-mh-\xi\right]^{m-2} \times$$

$$\times\left[(1-(-1)^m)\frac{x}{2}-mh+\xi\right]^{m-2}[(-1)^m\xi-mh][mx-(-1)^m\xi-m(2m-$$
$$1)h]\omega(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l} (-1)^m\gamma_m H(x-mh)\int_{mh}^{x-mh} (x-mh-\xi)^{m-1}(\xi-$$
$$mh)^m\nu((-1)^m\xi)d\xi;$$

$$\mu_{2l}(x) = \psi_{2'}\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma_1\left(-\frac{x}{2}-h\right)\omega(-x-h)H(-x-h) - \frac{1}{2}\gamma_1 H(-x-$$
$$h)\int_h^{-x-h} \omega(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{l} (-1)^m\gamma_m H(-x-mh)\int_{((-1)^m+1)\frac{x}{2}+mh}^{((-1)^m-1)\frac{x}{2}-mh} \left[(1+(-1)^m)\frac{x}{2}+mh-\right.$$
$$\xi m{-}2\times$$

$\times\left[(1-(-1)^m)\frac{x}{2}+mh+\xi\right]^{m-2}[(-1)^m\xi+mh][mx-(-1)^m\xi+m(2m-1)h]\omega(\xi)d\xi+$

$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\gamma_m H(-x-mh)\int_{x+mh}^{-mh}(x+mh-\xi)^{m-1}(\xi+mh)^m\nu((-1)^m\xi)d\xi.$

Теорема 3. *Пусть* $\psi_i(x)\in C\{(-1)^{i+1}x\geq 0\}\cap C^2\{(-1)^{i+1}x>0\}$ $(i=1,2)$; $D_{0t}^{\alpha}\varphi_j(t)\in C[0,+\infty)$,$\varphi_j(+\infty)=0$ $(j=\overline{1,n})$; $\psi_1(0)=\psi_2(0)$,$\psi_i((-1)^{i+1}\infty)=0$ $(i=1,2)$.

Тогда существует единственное решение $U(x,t)$ и $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ задачи R.

Доказательство.

A. Вопрос существования и единственности регулярного решения $U(x,t)$ задачи R сводится с помощью условий сопряжения (1.5) - (1.6) и функциональных соотношений (1.8), (1.9) - (1.10) к разрешимости интегро-дифференциально-разностных уравнений

$$\omega''(x)-\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\omega(x-\tau)+\Gamma(\alpha)\mu_{1l}(x),\ lh\leq x\leq(l+1)h;$$

$$\omega''(x)+\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\omega(x-\tau)+\Gamma(\alpha)\mu_{2l}(x),\ -(l+1)h\leq x\leq -lh;$$

$(l=0,1,2,\ldots)$, в классе функций $\omega(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$.

Единственность регулярного решения $U(x,t)$ задачи R следует из того, что однородная задача R имеет в области D тривиальное решение.

B. Используя условия (1.4) в (1.7), придем для определения функций $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ к системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)K_{lj}(t-\eta)d\eta=\rho_j(t),\ t>0\ (j=\overline{1,n}), \tag{1.11}$$

где

$$K_{lj}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{\beta-l}E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma\xi^{\beta})[\lim_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}G(x,\xi,t)]d\xi,$$

$$\rho_j(t)=-\varphi_j(t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\omega}(\xi)[\lim_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}G(x,\xi,t)]d\xi.$$

Очевидно, что правая часть системы (1.11) должна удовлетворять условию $\lim\limits_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}\rho_j(t)=0$, что приводит к равенству $\lim\limits_{t\to 0+}D_{0t}^{\alpha-1}\varphi_j(t)=\lim\limits_{x\to 0+}D_{0x}^{\beta-j}\overline{\omega}(x)$ $(j=\overline{1,n})$, которое является условием согласования между $\varphi_j(t)$ и $\omega(x)$ в точке $(0,0)\in\overline{D}$.

Взяв дробную производную порядка α от обеих частей системы (1.11), получим для определения $C_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$C_j(t)+\sum_{l=1}^{n}\int_0^t C_l(\eta)\overline{K}_{lj}(t-\eta)d\eta=\overline{\rho}_j(t),\ t>0\ (j=\overline{1,n}), \tag{1.12}$$

где

$$\overline{K}_{lj}(t) = D_{0t}^{\alpha} K_{lj}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{\beta-l} E_{\beta,\beta-l+1}^{1}(-\gamma\xi^{\beta}) W_j(\xi,t) d\xi, \qquad (1.13)$$

$$\overline{\rho}_j(t) = D_{0t}^{\alpha} \rho_j(t) = -D_{0t}^{\alpha} \varphi_j(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\omega}(\xi) W_j(\xi,t) d\xi, \qquad (1.14)$$

а

$$W_j(\xi,t) = \frac{2^{j-\beta-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^{\alpha(2m-1+j-\beta)/2-1} \times$$

$$\times H_{23}^{21}\left(\frac{(\xi+m\tau)^2}{4t^{\alpha}}\right.$$

Ядра (1.13) и правые части (1.14) системы (1.12) являются непрерывными функциями при $t > 0$, а в точке $t = 0$ имеют особенность порядка меньше единицы. Поэтому [5, с.86] система интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.12) имеет единственное решение $C_l(t)$, причем $D_{0t}^{\alpha-1} C_l(t) \in C[0,+\infty)$ $(l = \overline{1,n})$.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam - Tokyo, 2006.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL MIXED-COMPOSITE EQUATION WITH A ADVANCING-LATE ARGUMENT AND REFLEXION

M.V. BURTSEV, A.N. ZARUBIN

Orel State University

e-mail: burtsevmv@orel.ru

The initial boundary value problem for the mixed-composite equations with fractional derivative and reflexion is considered. The uniqueness' and existents theorems for the problem are proved.

Key words: Fractional Calculus, Mixed-Composite Type, Reflexion, H - function of Fox , Function of the Mittag-Leffler Type, Riemann-Liouville FractionDerivatives.

УДК 517.983

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

А.В.ГЛУШАК, Т.А.МАНАЕНКОВА

Белгородский государственный университет

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

В работе изучается задача типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего две различные дробные производные Адамара и доказывается равномерная корректность этой задачи с ограниченным оператором В .

Ключевые слова: дробные производные Адамара, однозначная разрешимость задачи типа Коши.

Пусть $M_q^{\alpha,\beta}$ – дифференциальный оператор вида

$$M_q^{\alpha,\beta} = {}^A D_{a+}^{\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}\, {}^A D_{a+}^{\beta}\right),$$

содержащий левосторонние дробные производные Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ [1, с. 250], [2, с. 110]

$${}^A D_{a+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\; t\frac{d}{dt}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\alpha} u(x)\frac{dx}{x}, \qquad t \in (a,\infty),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $a > 0$.

В банаховом пространстве X рассмотрим следующую задачу типа Коши с линейным замкнутым оператором B

$$M_q^{\alpha,\beta} u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Bu(t), \qquad t > a, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^A D_{a+}^{\beta-1} u(t) = u_0, \qquad \lim_{t\to a+} {}^A D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}\, {}^A D_{a+}^{\beta} u(t)\right) = 0, \tag{1.2}$$

где

$${}^A D_{a+}^{\beta-1} u(t) = {}^A I_{a+}^{1-\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\beta} u(x)\,\frac{dx}{x}$$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1-\beta$.

Специфика постановки начальных условий (1.2) состоит в том, что суммарный порядок производных, по сравнению с уравнением (1.1), уменьшается сначала на 1 в одном условии, а потом еще на α – в другом.

Кроме того, особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух условий вида (1.2) даже в том случае, когда $0 < \alpha + \beta < 1$. Эта особенность объясняется равенством

$$ {}^A D^{\alpha}_{a+} {}^A D^{\beta}_{a+} u(t) = {}^A D^{\alpha+\beta}_{a+} u(t) - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha-1} {}^A D^{\beta-1}_{a+} u(a) \ . $$

Например, в силу этого равенства уравнение (1.2) при $q = \gamma = 0$ может быть сведено к неоднородному уравнению

$$ {}^A D^{\alpha+\beta}_{a+} u(t) = Bu(t) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \ {}^A D^{\beta-1}_{a+} u(a) \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha-1}, $$

и для выделения единственного решения следует задавать два условия, а именно: одно условие

$$ \lim_{t\to a} {}^A D^{\beta-1}_{a+} u(t) = u_0, $$

чтобы определить правую часть уравнения, и еще одно условие, чтобы получить задачу типа Коши.

Метод сведения к неоднородному уравнению, по-видимому, менее удобен, т.к. он требует отдельного рассмотрения каждого из случаев $0 < \alpha+\beta \le 1$ и $1 < \alpha+\beta < 2$.

Заметим, что при $B = 0$ и ненулевых начальных условиях, задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$ {}^A D^{\alpha}_{a+} \left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^A D^{\beta}_{a+} u \right)(t) = 0, $$

$$ \lim_{t\to a+} {}^A D^{\beta-1}_{a+} u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to a+} {}^A D^{\alpha-1}_{a+} \left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^A D^{\beta}_{a+} u(t) \right) = u_1, $$

и ее решением является функция

$$ u(t) = \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} + \frac{\Gamma(\alpha-q) u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-q-1}, $$

что также подтверждает необходимость двух начальных условий.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара могут быть найдены в [2, 3].

Определение 1 . *Решением задачи (1.1), (1.2) называется непрерывная при $t > a$ функция $u(t)$ такая, что* ${}^A I^{1-\beta}_{a+} u(t)$ *и* ${}^A I^{1-\alpha}_{a+} \left(\left(ln\frac{t}{a}\right)^{q} {}^A D^{\beta}_{a+} u(t) \right)$ *представляют собой непрерывно дифференцируемые при $t > a$ функции, функция u(t) принимает значения из D(B) и удовлетворяет (1.1), (1.2).*

Определение 2 . *Задача (1.1), (1.2) называется равномерно корректной, если существует заданная на X, коммутирующая с B операторная функция $\Phi^{\alpha,\beta}_{\gamma,q}(t)$ и числа $M > \frac{1}{\Gamma(\beta)}$, $\omega \ge 0$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция $\Phi^{\alpha,\beta}_{\gamma,q}(t) u_0$ является ее единственным решением, и при этом для $\mu = \alpha+\beta+\gamma-q$,*

$$ \left\| \Gamma(\beta) \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\beta} \Phi^{\alpha,\beta}_{\gamma,q}(t) u_0 - u_0 \right\| = \mathcal{O}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu} \right) \|Bu_0\|, \quad t \to a, \quad (1.3) $$

$$ \left\| \Phi^{\alpha,\beta}_{\gamma,q}(t) \right\| \le M \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} t^{\omega}. \quad (1.4) $$

Согласно определению 2, задача (1.1), (1.2) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (1.4), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в (a, ∞). Помимо этого определение 2 содержит дополнительную информацию о порядке стремления решения к начальному элементу (соотношение (3)) и о его поведении при $t \to a$ и $t \to \infty$ (неравенство (1.4)). Эти дополнительные свойства решения удается установить в рассматриваемом далее случае.

В настоящей работе изучается задача типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего две различные дробные производные Адамара. Доказывается равномерная корректность задачи (1.1), (1.2) с ограниченным оператором.

Пусть далее $L(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X.

Теорема 1 . *Пусть $B \in L(X)$ и параметры задачи (1.1), (1.2) удовлетворяют неравенствам $\beta + \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma - q > 0, \gamma \leq q$. Тогда задача (1.1), (1.2) равномерно корректна и при этом*

$$\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu+\beta-1}B^i u_0 \ , \qquad (1.5)$$

где $\mu = \alpha + \beta + \gamma - q > 0$.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (1.1) оператор ${}^{A}I_{a+}^{\alpha}$ дробного интегрирования порядка α. Учитывая второе из условий (1.2), получим

$${}^{A}D_{a+}^{\beta}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\gamma}Bu(x)\frac{dx}{x} \ ,$$

а учитывая первое, будем иметь

$$u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}Bu(s)\frac{ds}{s} \ . (1.6)$$

Дальнейшее доказательство будем осуществлять методом последовательных приближений. Пусть

$$u_0(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} \ ,$$

$$u_m(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}Bu_{m-1}(s)\frac{ds}{s} \ .$$

Используя интеграл 2.2.4.8 из [3]

$$\int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \tau^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta), \qquad \tau, \mathrm{Re}\ \alpha, \mathrm{Re}\ \beta > 0$$

при $m = 1,2, \ldots$ находим

$$u_1(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q} \frac{dx}{x} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma+\beta-1} Bu_0 \frac{ds}{s} =$$

$$= \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{B(\alpha,\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma-q-1} \frac{dx}{x}\ Bu_0 =$$

$$= \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{B(\alpha,\beta+\gamma)B(\beta,\alpha+\beta+\gamma-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1} Bu_0 =$$

$$= \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-q)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+2\beta+\gamma-q)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1} Bu_0\ ,$$

$$u_2(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q} \frac{dx}{x} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} B \times$$

$$\times \left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)} \left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1} Bu_0 \right) \frac{ds}{s} =$$

$$= \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1} Bu_0 +$$

$$+ \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha+2\beta+2\gamma-q)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)\Gamma(2\alpha+2\beta+2\gamma-q)\Gamma(2\mu+\beta)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1} B^2 u_0\ , \ldots,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$u_m(t) = u_{m-1}(t) + \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta+\gamma+(j-1)\mu)\Gamma(j\mu)(\ln t - \ln a)^{m\mu} B^m u_0}{\Gamma(\beta)\prod_{j=1}^m \Gamma(\mu+q+(j-1)\mu)\Gamma(\beta+\mu+(j-1)\mu)}\ .$$

Отметим, что в написанных выше соотношениях для сходимости интегралов нужны условия $\beta + \gamma > 0, \mu = \alpha + \beta + \gamma - q > 0$.

Отсюда в пределе при $m \to \infty$ имеем следующее представление искомого решения задачи (1.1), (1.2):

$$\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^\infty \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)} \right) \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu+\beta-1} B^i u_0\ ,$$

что может быть установлено непосредственной проверкой.

Докажем теперь справедливость соотношений (1.3) и (1.4). Действительно, из (1.5) следует, что

$$\left\| \Gamma(\beta) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{1-\beta} \Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t) u_0 - u_0 \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)} \right) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{i\mu} B^i u_0 \right\| =$$

$$= \mathcal{O}\left(\left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\mu} \right) \|Bu_0\|, \qquad t \to a.$$

Таким образом, равенство (1.3) установлено. Докажем далее оценку (1.4). Из (1.5) выводим неравенство

$$\left\| \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{1-\beta} \Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t) u_0 - u_0 \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)\cdots\Gamma(\beta+\gamma+(i-1)\mu)\Gamma(i\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\mu+q)\cdots\Gamma(\beta+(i-1)\mu)\Gamma(i\mu+q)\Gamma(i\mu+\beta)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{i\mu} \|B\|^i.$$

Для $j = 0,1,\cdots,i-1$ справедливо неравенство [4, с.73, соотношение (14)]

$$\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(j\mu-\gamma)} < 1, \tag{1.7}$$

поэтому для достаточно больших t имеем

$$\left\| \left(ln \frac{t}{a} \right)^{1-\beta} \Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t) u_0 - u_0 \right\| \le M_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|B\|^i}{\Gamma(i\mu+\beta)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{i\mu} =$$

$$= M_1 E_{\mu,\beta}\left(\left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\mu} \|B\|^{1/\mu} \right) \le$$

$$\le M_2 \exp\left(\omega \ln \frac{t}{a} \right) = M t^{\omega}, \quad \omega > \|B\|^{1/\mu^2},$$

при этом мы использовали асимптотическое равенство

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp\left(z^{1/\alpha}\right) + \mathcal{O}(1/|z|), \quad z \to \infty, \quad |\arg\, z| \le \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{1.8}$$

которому удовлетворяет функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ (см. формулу (22) на с. 224 из [5]).

Следовательно, неравенство (1.4) установлено, и для доказательства равномерной корректности задачи (1.1), (1.2) с оператором $B \in L(X)$ осталось установить единственность решения этой задачи. Предположим, что есть два решения задачи (1.1), (1.2); тогда их разность, которую мы обозначим через $U(t)$, является решением задачи (1.1), (1.2) с двумя нулевыми условиями (1.2), учитывая которые, после интегрирования уравнения (1.1) получим

$$U(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}BU(s)\frac{ds}{s}.$$

Пусть $t\in[a,a+\delta]$, $\delta>0$, тогда

$$\|U(t)\|\le$$

$$\frac{\|B\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}\frac{ds}{s}=$$

$$=\frac{B(\alpha,\gamma+1)\|B\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\gamma-q}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{\|B\|\Gamma(\gamma+1)B(\beta,\alpha+\gamma-q+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}=$$

$$=\frac{\|B\|\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\gamma-q+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\mu+1)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\le$$

$$\le M_0(\ln(1+\delta))^{\mu}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|.$$

Выбирая $\delta>0$ достаточно малым, получим

$$\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\le\frac{1}{2}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|,$$

следовательно, $U(t)=0$ на $[a,a+\delta]$.

Далее покажем, что $U(t)=0$ на произвольном отрезке $[c,c+\delta]$. То есть, докажем, что если решение уравнения (1.1) удовлетворяет условиям

$$^{A}D^{\beta-1}U(t)\Big|_{t\le c}=0,\quad {}^{A}D^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}{}^{A}D^{\beta}U(t)\right)\Big|_{t\le c}=0 \quad (1.9)$$

при каком-то $c>a$, то оно обращается в нуль и на некотором промежутке $[c,c+\delta]$, где число $\delta>0$ будет выбрано, не зависящим от c.

Записав уравнение (1.1) в виде

$$^{A}D^{\alpha}_{c+}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}{}^{A}D^{\beta}_{c+}U(t)\right)=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma}BU(t),$$

после интегрирования с учетом нулевых начальных условий (1.9) получим

$$U(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_c^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_c^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}BU(s)\frac{ds}{s}.$$

Пусть $t\in[c,c+\delta]$, тогда

$$\max_{[c,c+\delta]}\|U(t)\|\le\frac{\|B\|\max_{[c,c+\delta]}\|U(t)\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_c^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_c^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}\frac{ds}{s}. \quad (1.10)$$

Используя формулу 2.2.6.1 из [3] и формулы 7.2.1.7, 2.21.1.20 из [6], вычислим интеграл

$$J(t) = \int_c^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_c^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}\frac{ds}{s} =$$

$$= \int_c^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_{\ln\frac{c}{a}}^{\ln\frac{x}{a}}\left(\ln\frac{x}{a}-z\right)^{\alpha-1}z^{\gamma}dz .$$

Учитывая формулу 2.2.6.1 из [3] и вводя функцию $w(t)=\ln\frac{t}{a}$, получим

$$J(t) = w(c)^{\gamma}B(1,\alpha)\int_c^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+1;\frac{w(c)-w(x)}{w(c)}\right)\frac{dx}{x}$$

После замены переменной $\tau = w(x)$ с учетом равенства $\mathrm{B}(1,\alpha)=\frac{1}{\alpha}$, получим

$$J(t) = \frac{w(c)^{\gamma}}{\alpha}\int_{w(c)}^{w(t)}(w(t)-\tau)^{\beta-1}\tau^{-q}(\tau-w(c))^{\alpha}{}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+1;\frac{w(c)-\tau}{w(c)}\right)d\tau = \frac{w(c)^{\gamma+1}}{\alpha}\times$$

$$\times\int_{w(c)}^{1-w(c)/w(t)}\left(w(t)-\frac{w(c)}{1-z}\right)^{\beta-1}\left(\frac{w(c)}{1-z}\right)^{-q}\left(\frac{w(c)}{1-z}-w(c)\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+1;\frac{z}{z-1}\right)\times$$

$$\times\frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{w(c)^{\alpha+\gamma-q+1}\,w(t)^{\beta-1}}{\alpha}\int_0^{1-w(c)/w(t)}\left(\frac{w(t)-w(c)}{w(t)}-z\right)^{\beta-1}(1-z)^{q-\alpha-\beta}z^{\alpha}\times$$

$$\times\ {}_2F_1(1,\alpha+\gamma+1;\alpha+1;z)\ dz = \frac{w(c)^{1-\beta+\gamma}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)\ (w(t)-w(c))^{\alpha+\beta}}{\alpha\ w(t)^{k+1-\beta}}\times$$

$$\times\ F_3\left(\alpha+\beta-q,1,\beta,1+\alpha+\gamma;1+\alpha+\beta;1-\frac{w(t)}{w(c)},1-\frac{w(c)}{w(t)}\right), \qquad (1.11)$$

где

$$F_3(a,a',b,b';c;\omega,z)=\sum_{j,l=0}^{\infty}\frac{(a)_j(a')_l(b)_j(b')_l}{(c)_{j+l}}\cdot\frac{\omega^j z^l}{j!\ l!}.$$

Если $\gamma \le q$, то из (1.10), (2.6) следует неравенство

$$\max_{[c,c+\delta]}\|U(t)\| \le M_0(\ln(1+\delta))^{\alpha+\beta}\max_{[c,c+\delta]}\|U(t)\|, \qquad (1.12)$$

где постоянная $M_0>0$ не зависит от c , так как

$$\left|1-\frac{w(t)}{w(c)}\right| \le |1-w(\delta)| = \left|1-\ln\frac{\delta}{a}\right| \le \frac{1}{2} ,$$

если

$$a\sqrt{e}\le\delta\le a\sqrt{e^3} ,$$

и при этом

$$\left|1-\frac{w(c)}{w(t)}\right| \le \left|1-\frac{1}{w(\delta)}\right| \le \frac{1}{3} \quad .$$

Выбирая в (1.12) $\delta > 0$ достаточно малым, не зависящим от c , мы убеждаемся в том, что $U(t)=0$ на $[c,\ c+\delta]$. Тем самым доказана единственность решения на любом конечном промежутке. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, в частности, представление

$$\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} E_{\alpha+\beta,\beta}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta} B\right)u_0 \ ,$$

а также предельное представление при $\beta = 1$

$$\Phi_{0,0}^{\alpha,1}(t)u_0 = E_{\alpha+1,1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+1} B\right)u_0 \ .$$

Перейдем теперь к изучению задачи

$$M_q^{\alpha,\beta}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Bu(t), \qquad t>a, \tag{1.13}$$

$$\lim_{t\to a+} D_{a+}^{\beta-1}u(t) = 0, \quad \lim_{t\to a+} D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} D_{a+}^{\beta}u(t)\right) = u_1, \tag{1.14}$$

Определение 3 . *Задача (1.13), (1.14) называется равномерно корректной, если существует заданная на X, коммутирующая с B операторная функция* $\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)$ *и числа* $M \ge 1$, $\omega \ge 0$ *такие, что для любого* $u_1 \in D(B)$ *функция* $\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1$ *является ее единственным решением, и при этом*

$$\left\|\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+q-\alpha-\beta}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1 - u_1\right\| = \mathcal{O}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma-q}\right)\|Bu_1\|,\ t\to a, \tag{1.15}$$

$$\left\|\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le M\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-q-1} t^{\omega}. \tag{1.16}$$

Теорема 2 . *Пусть* $B \in L(X)$ *и параметры задачи (1.13), (1.14) удовлетворяют неравенствам* $\alpha - q > 0$, $\alpha+\beta+\gamma-q > 0$, $\gamma \le q$. *Тогда задача (1.1), (1.2) равномерно корректна, и при этом*

$$\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1 = \frac{\Gamma(\alpha-q)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\left(u_1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu} B^i u_1\right), \tag{1.17}$$

где $\mu = \alpha+\beta+\gamma-q > 0$.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (1.13) оператор дробного интегрирования и, учитывая условия (1.14), получим

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1} +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\ \frac{dx}{x}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} Bu(s)\ \frac{ds}{s}\ . \quad (1.18)$$

Для дальнейшего доказательства применим метод последовательных приближений. Пусть

$$u_0(t)=\frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1},$$

$$u_m(t)=\frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}\ +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\ \frac{dx}{x}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} Bu_{m-1}(s)\ \frac{ds}{s}\ .$$

Используя интеграл 2.2.4.8 [3], при $m=1,2,\ldots$ находим

$$u_1(t)=u_0(t)+\frac{\Gamma(\alpha-q)\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha-q+\mu)\ Bu_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(\mu-\gamma)\Gamma(2\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\mu-\gamma-1};$$

$$u_2(t)=u_1(t)+\frac{\Gamma(\alpha-q)\Gamma(\alpha-q+\mu)\Gamma(\alpha-q+2\mu)\Gamma(\mu)\Gamma(2\mu)\ B^2u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(\alpha+2\mu)\Gamma(\mu-\gamma)\Gamma(2\mu-\gamma)\Gamma(3\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{3\mu-\gamma-1};\ldots$$

что в общем случае приводит к формуле

$$u_m(t)=u_{m-1}(t)+\prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)\ B^m u_1}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma((j+1)\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{(m+1)\mu-\gamma-1}.$$

Отметим, что в написанных выше соотношениях для сходимости интегралов нужны условия $\alpha-q>0$, $\mu=\alpha+\beta+\gamma-q>0$.

Отсюда в пределе при $m\to\infty$ имеем следующее представление искомого решения задачи (1.13), (1.14)

$$\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1=\frac{\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}\times$$

$$\times\left(u_1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}B^i u_1\right).$$

Докажем теперь справедливость соотношений (1.15) и (1.16). Действительно, из (1.17) следует

$$\left\|\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+q-\alpha-\beta}\ \Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1-u_1\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}B^i u_1\right\|=O\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\right)\|Bu_1\|,$$

когда $t\to a$. Таким образом, равенство (1.15) установлено.

Докажем далее оценку (1.16). Из (1.17) выводим неравенство

$$\left\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+\gamma-\mu}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le \frac{\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)} \quad\times$$

$$\times\quad\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-q+\mu)\Gamma(\mu)\cdots\Gamma(\alpha-q+i\mu)\Gamma(i\mu)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}\|B\|^{i}}{\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(2\mu-\gamma)\cdots\Gamma(\alpha+i\mu)\Gamma(\mu-\gamma+i\mu)}\right).$$

Учитывая неравенство (1.7), оценим

$$\left\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+\gamma-\mu}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le M_1\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}\|B\|^{i}}{\Gamma((i+1)\mu-\gamma)} =$$

$$= M_1E_{\mu,\mu-\gamma}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\|B\|^{1/\mu}\right) \le M_2 exp\left(\omega\ln\frac{t}{a}\right) = Mt^{\omega},\quad \omega > \|B\|^{1/\mu^2},$$

Поскольку единственность решения задачи (1.13), (1.14) уже установлена при доказательстве теоремы 1, то тем самым теорема 2 доказана.

В частности, если $B\in L(X)$, то

$$\Psi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_1 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}B\right)u_1 =^{A} I_{a+}^{\alpha}\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_1.$$

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06 - 08 - 96312

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск, Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. - Elsevier. 2006.
3. Килбас А.А., Марзан А.А, Титюра А.А. Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка // ДАН - 2003. - Т. 389, № 6. - С. 734 - 738.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1983.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. - М.: Наука, 1965.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. - М.: Наука, 1967.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М: Наука, 1986.
8. Иосида К. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1967.

CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR AN ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION WITH HADAMARD FRACTIONAL DERIVATIVES

A.V. GLUSHAK AND T.A. MANAENKOVA

Belgorod State University

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

The well-posedness of a Cauchy-type problem with two Hadamard fractional derivatives and bounded operator is proved.

Key words: Hadamard fractional derivative, one-valued solvability of Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 05C78

SOME RESULTS ON PRIME LABELINGS OF GRAPHS

ADEL T. DIAB

Ain Shams University

e-mail: adeldiab80@hotmail.com

A graph is said to be prime if it has a relatively prime labeling on its vertices which satisfies certain properties. The purpose of this paper is to give some new families of graphs that have a prime labeling and give some necessary and sufficient conditions for some families of prime graphs.

Key words: Graph, prime labeling.

Introduction

It is well known that graph theory has applications in many other fields of study, including physics, chemistry, biology, communication, psychology, sociology, economics, engineering, operations research, and especially computer science. For all standard notation and terminology in graph theory we follow [10]. Graph labelings where the vertices are assigned real values subject to certain conditions like as Graceful [9,12], Harmonious [9,12], Cordial [3-8], Prime [9] and others, have often been motivated by practical problems such as coding theory, communication networks and astronomy, but they are also of logico- mathematical interest in their own right. An enormous body of literature has grown around the subject especially in the last thirty years or so, and is presented in a survey by Gallian [9].

A graph G is an ordered pair G(V,E), where V(G) stands for a finite set of elements called vertices, while E(G) - a finite set of unordered pairs of vertices called edges. The cardinality of the set of vertices V(G) is denoted by the symbol $|V|$ and called the order of graph G. Likewise, the cardinality of the set of edges E(G) is denoted by the symbol $|E|$ and called the size of graph G. The vertices u, v $\in V(G)$ are called adjacent (or neighbors) if $\{u,v\}$ in E(G) and nonadjacent if $\{u,v\}$ not in E(G). The degree deg(v) of vertex v in graph G is the number of edges incident to vertex v in graph G, i.e., $|e \in E(G): v \in e|$. The maximum degree of a vertex in graph G is denoted by $\Delta(G)$, while the minimum degree is denoted by $\delta(G)$. A set of vertices V of a graph G is said to be independent if any two vertices u and v in V are not adjacent in G.

A graph G with vertex set V(G) is said to have a prime labeling if its vertices can be labeled with distinct integers 1, 2, 3, $\cdots$, $|V|$ such that for each $xy \in E(G)$ the labels assigned to x and y are relatively prime. A graph that admits a prime labeling is called a prime graph. The notion of a prime labeling originated with Entringer and was introduced in a paper by Tout, Dabboucy, and Howalla [14]. Around the classes of trees known to have a prime labelings are: paths, stars, caterpillars , complete binary trees, spiders and all tree of order up to 50. Also, other graphs with prime labelings include all cycles and a complete graph K_n does not have a prime labeling for $n \geq 4$ [9].

Youssef [15] has shown that $K_n \odot \overline{K_1}$ is prime if and only if $n \leq 7$. In section 3, we extend this result to show that $K_n \odot \overline{K_2}$ is prime if and only if $n \leq 16$. Moreover, we show that the graph $\overline{K_m} \odot K_n$ is prime if and only if m = 1 and n = 2, or n = 1 and for all $m \geq 1$.

Deretsky, Lee and Mitchem [2] have shown that the disjoint union $C_{2k} \cup C_n$ of two cycles C_{2k} and C_n is prime. In section 4, we extend this result to show that the union $C_n \cup C_m$ of two cycles C_n and C_m is not prime if and only if both n and m are odd. Moreover, we show that the joint $C_n + C_m$ of two cycles C_n and C_m is not prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 3$, the union $P_n \cup P_m$ of two paths P_n and P_m is prime for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$, the joint $P_n + P_m$ of two paths P_n and P_m is prime if and only if n =1 and $m \geq 1$(or vice versa), or n =2 and m odd (or vice versa), the union $C_n \cup P_m$ of cycles C_n and paths P_m is prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$, and the joint $C_n + P_m$ of cycles C_n and paths P_m is not prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$.

Seoud, Diab, and Elsakhawi [12], have shown the following complete bipartite graphs are prime: $K_{2,m}$ and $K_{3,m}$ unless m = 3 or m = 7. In section 5, we extend those results to some complete tripartite, namely, $K_{1,1,n}$ is prime for all $n \geq 1$ and $K_{1,2,n}$ is prime for all $n \geq 1$ except n = 3 or n = 7. Finally, we show that the following graphs are prime: $P_n \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$, $C_n \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$, $\overline{K_n} \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$, $\overline{K_1} + K_{1,m}$ for all $m \geq 1$, $P_n \odot \overline{K_1}$ for all $n \geq 1$, $\overline{K_1} \odot P_n$ for all $n \geq 1$, and $\overline{K_n} \cup \overline{K_m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$.

2. Notation and Preliminaries

We introduce some basic properties of graphs and we will study the effect of these properties on the prime graphs. The maximum cardinality of an independent set of vertices of a graph G is called the vertex independence number and is denoted by $\beta(G)$.

A coloring of a graph G is an assignment of colors (which are actually considered as elements of some set) to the vertices of G, one color to each vertex, so that adjacent vertices are assigned different colors. A graph G for which there exists a vertex - coloring which requires k colors is called k- colorable, while such a coloring is called a k- coloring. The smallest number k for which there exists a k-coloring of graph G is called the chromatic number of graph G and is denoted by $\chi(G)$. Such a graph G is called k-chromatic, while any coloring of G which requires k = $\chi(G)$ colors is called chromatic or optimal. Harary [10] has shown that for any graph G, we have $\chi(G) \leq |V| - 1 - \beta(G)$.

The clique number $\omega(G)$ of a graph G is the maximum order among the complete subgraph of G. Clearly, $\omega(G) = \beta(\overline{G})$ for every graph G, where the complement $\overline{G}$ of a graph G is that graph with vertex set V(G) such that two vertices are adjacent in $\overline{G}$ if and only if these vertices are not adjacent in G. If $K_n \subseteq G$ for some n, where K_n is a complete graph of order n, then $\chi(G) \geq n$. It follows that $\chi(G) \geq \omega(G)$ (for more details, one can refer to [1,2,9,10]).

We follow the basic notation and terminology of the theory of numbers as in [11]. In particular, we let p_r be the rth prime number, where $p_1 = 2$; $\pi(n)$ is the number of primes less than or equal to n ; the Euler's ϕ - function $\phi(n)$ is defined as the number of positive integers less than or equal to n that are relatively prime to n.

Let x be any real number, then $\lfloor x \rfloor$ and $\lceil x \rceil$ denote the greatest integer less than or equal x, the smallest integer greater than or equal x respectively.

Seoud and Youssef [13,15] proved the following result, which gives some necessary conditions for a prime graph.

Theorem 2.1. *If G is a prime graph of order n, then*
(1) $|E| \leq \rho(n)$, *where* $\rho(n)$ *is the maximum number of edges in G,*
(2) $\beta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

(3) $\omega(G) \le \pi(n) + 1$.

Proof. For the proof, the reader may be referred to the articles [13,15].

Finally, for specific labelings of $K_n \odot \overline{K_m}$, we let V($K_n \odot \overline{K_m}$) = $\{ u_i : 1 \le i \le n\} \cup \{ v_{ji} : 1 \le j \le m \}$, and we write the vertices of $K_n \odot \overline{K_m}$ in m- tuples (u_i, v_{1i} , v_{2i}, ⋯,v_{mi}), where $1 \le i \le n$ and we let (x_i, y_{1i} , y_{2i} ,⋯,y_{mi}) denote the joint labeling.

3. Coronas of Complete Graphs and Null Graphs

It is well known that the corona $G_1 \odot G_2$ of G_1 and G_2 is the graph obtained by taking one copy of G_1 (which has n_1 vertices) and n_1 copies of G_2, and then joining i^{th} vertex of G_1 to every vertex in the i^{th} copy of G_2. So the order of $G_1 \odot G_2$ is $n_1 + n_1 n_2$, where n_2 is the order of G_2 and its size is $m_1 + n_1 n_2 + n_1 m_2$, where m_i is the size of G_i for all i =1,2.

Youssef [15] has shown that $K_n \odot \overline{K_1}$ is prime if and only if $n \le 7$. In this section, we extend this result to show that $K_n \odot \overline{K_2}$ is prime if and only if $n \le 16$. Moreover, we show that the graph $\overline{K_m} \odot K_n$ is prime if and only if m = 1 and n = 2, or n = 1 and for all $m \ge 1$. Now, we present the proof of above result due to Youssef using our notation.

Lemma 3.1. *The graph $K_n \odot \overline{K_1}$ is prime if and only if $n \le 7$.*

Proof. Let $n \ge 8$, then $\pi(2n) \le n - 2$ and since $\omega(K_n \odot \overline{K_1}) = n$, we get $\omega(K_n \odot \overline{K_1}) > \pi(2n) + 1$ and hence by theorem 2.1, $K_n \odot \overline{K_1}$ is not prime. Conversely, if $n \le 7$, then $K_1 \odot \overline{K_1} \equiv P_2$, $K_2 \odot \overline{K_1} \equiv P_4$ are trivially prime and $K_3 \odot \overline{K_1}$ is prime with the following prime labeling (1,2), (3,4), (5,6), i.e., we label the vertices of K_3 as 1,3,5 and we label the corresponding pendent vertices as 2,4,6. For $4 \le n \le 7$, we let $V(K_n \odot \overline{K_1})$ = (u_1,u_2 , u_3, ⋯,u_n)∪ (v_1,v_2 , v_3, ⋯,v_n), where $E(K_n \odot \overline{K_1})$ = {u_iu_j:1 i <j n } $\{ u_i v_j : 1 \le i \le n \}$, then $K_n \odot \overline{K_1}$, where $4 \le n \le 7$ are prime with the following prime labeling functions: f : $V(K_4 \odot \overline{K_1}) \to \{1,2,3,..,8\}$ such that f(u_i) = 2i-1, f(v_i) = 2i, where $1 \le i \le 4$ (i.e., (1,2), (3,4), (5,6), (7,8)), f : $V(K_5 \odot \overline{K_1}) \to \{1,2,3,..,10\}$ such that f(u_1) = 1, f(u_2) = 2, f(u_3) = 3, f(u_4) = 5, f(u_5) =7, f(v_1) = 10, f(v_2) = 9, f(v_3) = 4, f(v_4) = 6, f(v_5) = 8 (i.e., (1,10), (2,9), (3,4), (5,6), (7,8)), f : $V(K_6 \odot \overline{K_1}) \to \{1,2,3,..,12\}$ such that f(u_1) = 1, f(u_2) = 2, f(u_3) = 3, f(u_4) = 5, f(u_5) =7, f(u_6) =11, f(v_1) = 10, f(v_2) = 9, f(v_3) = 4, f(v_4) = 6, f(v_5) = 8, f(v_6) = 12 (i.e., (1,10), (2,9), (3,4), (5,6), (7,8),(11,12)) and f : $V(K_7 \odot \overline{K_1}) \to \{1,2,3,..,14\}$ such that f(u_1) = 1, f(u_2) = 2, f(u_3) = 3, f(u_4) = 5, f(u_5) =7, f(u_6) =11, f(u_7) =13, f(v_1) = 10, f(v_2) = 9, f(v_3) = 4, f(v_4) = 6, f(v_5) = 8, f(v_6) = 12, f(v_7) = 14 (i.e., (1,10), (2,9), (3,4), (5,6), (7,8), (11,12),(13,14)), the lemma follows.

Lemma 3.2. *The graph $K_n \odot \overline{K_2}$ is prime if and only if $n \le 16$.*

Proof. Let $n \ge 17$, then $\pi(3n) \le n - 2$ and since $\omega(K_n \odot \overline{K_2}) = n$, we get $\omega(K_n \odot \overline{K_2}) > \pi(3n) + 1$ and hence by theorem 2.1, $K_n \odot \overline{K_2}$ is not prime. Conversely, if $n \le 16$, the first n-tuples suffice as a prime labeling for $K_n \odot \overline{K_2}$: (1,2,3), (5,4,6), (7,8,9), (11,10,12), (13,14,15), (17,16,18),(19,20,21), (23,22,24), (26,25,27), (29,28,30), (31,32,33), (35,34,36), (37,38,39), (41,40,42), (43,44,45), (47,46,48), the lemma follows.

Lemma 3.3. *The graph* $\overline{K_m} \odot K_1$ *is prime for all* $m \geq 1$.

Proof. Let $V(K_m \odot \overline{K_1}) = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_m) \cup (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m)$, then the graph $\overline{K_m} \odot K_1$ is prime with the following prime labeling function

f : $V(\overline{K_m} \odot \overline{K_1}) \to \{1,2,3,..,2m\}$ such that f(u_i) = 2i-1, f(v_i) = 2i, where $1 \leq i \leq m$ (i.e.,(1,2),(3,4),(5,6),⋯,(2m-1, 2m)), the lemma follows.

Example 3.1. The graph $\overline{K_1} \odot K_2$ is prime.

Solution. This follows directly since $\overline{K_1} \odot K_2 \equiv K_3$ and K_3 is clearly prime.

Lemma 3.4. *If either* $m \geq 1$ *and* $n > 2$, *or* $m > 1$ *and n = 2, then the graph* $\overline{K_m} \odot K_n$ *is not prime.*

Proof. It is easy to verify that $\beta(\overline{K_m} \odot K_n)$ = m and m $< \left\lfloor \frac{m(n+1)}{2} \right\rfloor$ for all $m \geq 1$ and $n > 2$, or for all $m > 1$ and n = 2, and hence by theorem 2.1, $\overline{K_m} \odot K_n$ is not prime, the lemma follows.

Theorem 3.1. *The graph* $\overline{K_m} \odot K_n$ *is prime if and only if m = 1 and n = 2, or n = 1 and for all* $m \geq 1$.

Proof. The proof follows directly from lemma 3.3, example 3.1 and lemma 3.4, the theorem follows.

4. Joins and Unions of Cycles and Paths

As stated in [9], every path P_n is prime and every cycle C_n is prime. In this section we extend those results to pairs of paths, pairs of cycles, and graphs consisting of one cycle and one path. Deretsky, Lee and Mitchem [2] have shown that the disjoint union $C_{2k} \cup C_n$ of two cycles C_{2k} and C_n is prime. The following theorem generalizes this result as follows:

Theorem 4.1. *The union* $C_n \cup C_m$ *of two cycles* C_n *and* C_m *is not prime if and only if both n and m are odd.*

Proof. If both n and m are odd, then it is clear that β(C_n C_m) $= \beta(C_n) + \beta(C_m) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor$ and hence by theorem 2.1, the graph $C_n \cup C_m$ is not prime. Conversely, we have two cases:

Case 1. n and m are even.

We label the vertices of C_n as 1,2,3, ⋯ n, and we label the vertices of C_m as n+1, n+2,…, n + m. So, the reader can easily verify that the graph $C_n \cup C_m$ is prime.

Case 2. n even and m odd (or vice versa).

We label the vertices of C_n as 2,3, ⋯,n+1, and we label the vertices of C_m as 1, n+2, ⋯, n + m, which clearly give a graph $C_n \cup C_m$ is prime, the theorem follows.

Youssef [15], has shown that the joint $C_n + C_m$ of two cycles C_n and C_m is not prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 3$ as follows.

Lemma 4.1. *The joint $C_n + C_m$ of two cycles C_n and C_m is not prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 3$.*

Proof. Since β(C_n + C_m) = max {β(C_n), β(C_m) }= max $\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\} < \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor$ for all $n \geq 3$ and $m \geq 3$, hence by theorem 2.1, the graph $C_n + C_m$ is not prime, the lemma follows.

Lemma 4.2. *The union $P_n \cup P_m$ of two paths P_n and P_m is prime for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$.*

Proof. Without loss of generality, we assume that $n \leq m$, then let V(P_n) = $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ and V(P_m) =$(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m)$. Therefore the graph $P_n \cup P_m$ is prime with the following prime labeling function f : V($P_n \cup P_m$)→ $\{1,2,3,\cdots, n+m\}$ such that f((u_i)=i, where $1 \leq i \leq n$, and f(v_j) = j, where $n+1 \leq j \leq n+m$, the lemma follows.

Lemma 4.3. *The joint $P_1 + P_n$ of two paths P_1 and P_n is prime for all $n \geq 1$.*

Proof. Let V(P_1)= $\{u\}$ and V(P_n)= $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$. Therfore the graph $P_1 + P_n$ is prime with the following labeling function f :V($P_1 + P_n$) → $\{1,2,3,\cdots, n+1\}$ such that f(u) = 1 and f(u_j)= j, where $2 \leq j \leq n+1$, the lemma follows.

Lemma 4.4. *The joint $P_2 + P_n$ of two paths P_2 and P_n is prime for all $n \geq 1$ if and only if n odd.*

Proof. If n is even, then it is clear that β(P_2+ P_n) = max $\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\} < \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor$ for all even $n \geq 2$, hence the necessity follows directly from theorem 2.1. Conversely, suppose that n is odd, and let V($P_2 + P_n$)= $\{u, v\} \cup \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$, then we have two cases.

Case 1. n+2 is prime.

The graph $P_2 + P_n$ is prime with the following prime labeling function f : V($P_2 + P_n$)→ $\{1,2,3,\cdots, n+2\}$ such that f(u) = 1, f(v) = n+2, and f(u_i) = i+1, where $1 \leq i \leq n$.

Case 2. n+2 is not prime.

The graph $P_2 + P_n$ is prime with the following prime labeling function f : V($P_2 + P_n$)→ $\{1,2,3,\cdots, n+2\}$ such that f(u) = 1, f(v) = p, where p is the greatest prime less than n+2, f(u_1) = p+1, f(u_2) = p+2, f(u_3) = p+3, ⋯, f(u_{p-3}) = n+2, f(u_{p-2}) = 2, ⋯, f(u_n) = p-1, i.e., we label the vertices of P_2 as 1, p and we label the vertices of P_n as p+1, p+2, ⋯, n+2, 2, 3, ⋯, p-1. Therefore the sufficiency follows, the lemma follows.

Lemma 4.5. *The joint $P_n + P_m$ of two paths P_n and P_m is not prime for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$ except for n = 1 and for all $m \geq 1$(or vice versa), or n = 2 and m odd (or vice versa).*

Proof. The proof follows directly from the fact that β(P_n+ P_m) = max $\{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{m}{2} \rceil\} < \lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$ (or vice versa), or n = 2 and m even (or vice versa), and theorem 2.1, the lemma follows.

Theorem 4.2. *The joint $P_n + P_m$ of two paths P_n and P_m is prime if and only if n =1 and $m \geq 1$(or vice versa), or n =2 and m odd (or vice versa)*

Proof. The proof follows directly from lemma 4.3, lemma 4.4 and lemma 4.5, the theorem follows.

Lemma 4.6. *The union $C_n \cup P_m$ of cycls C_n and paths P_m is prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$.*

Proof. Without loss of generality, we assume that $n \leq m$, then let V(C_n) = $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ and V(P_m) =$(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m)$. Therefore the graph $C_n \cup P_m$ is prime with the following prime labeling function f : V $(C_n \cup P_m) \to \{1,2,3,\cdots, n+m\}$ such that f(u_i)=i, where $1 \leq i \leq n$, and f(v_j) = j, where $n+1 \leq j \leq n+m$, the lemma follows.

Lemma 4.7. *The joint $C_n + P_m$ of cycles C_n and paths P_m is not prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$.*

Proof. If n = 3 and $m \leq 2$, then from the fact that K_n is not prime for all $n \geq 4$, $C_3 + P_1 \equiv K_4$ and $C_3 + P_2 \equiv K_5$, we get $C_n + P_m$ is not prime. For $n \geq 3$ and $m \geq 3$, it is clear that β(C_n+ P_m) = max $\{(C_n),(P_m)\}$= max $\{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{m}{2} \rceil\} < \lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ hence by theorem 2.1, the graph $C_n + P_m$ is not prime, the lemma follows.

5. Complete Tripartite Graphs with Other Graphs

Seoud, Diab, and Elsakhawi [12], have shown the following complete bipartite graphs are prime: $K_{2,m}$ and $K_{3,m}$ unless m = 3 or m = 7. In this section, we extend those results to show that $K_{1,1,n}$ is prime for all $n \geq 1$ and $K_{1,2,n}$ is prime for all $n \geq 1$ except n = 3 or n = 7. Moreover, we show that the following graphs are prime: $P_n \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$, $C_n \cup K_{1,m}$, for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$, $\overline{K_n} \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$, $\overline{K_1} + K_{1,m}$ for all $m \geq 1$, $P_n \odot \overline{K_1}$ for all $n \geq 1$, $\overline{K_1} \odot P_n$ for all $n \geq 1$, and $\overline{K_n} \cup \overline{K_m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$.

Lemma 5.1. *The complete tripartite graph $K_{1,1,n}$ is prime for all $n \geq 1$.*

Proof. Let the set of vertices of $K_{1,1,n}$ be L = $\{u\}$, M =$\{v\}$ and N = $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$, then we label the vertices of $K_{1,1,n}$ as u =1, v = p, where p is the greatest prime less than or equal to n+2, and we label the vertices of N by the remaining labels, which give a prime labeling and hence the considered graph is prime, the lemma follows.

Lemma 5.2. *The complete tripartite graph $K_{1,2,n}$ is prime for all $n \geq 1$ except for n = 3, or n = 7.*

Proof. Let the set of vertices of $K_{1,2,n}$ be L = $\{u\}$, M = $\{u, w\}$ and N = $(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$, then we label the vertices of $K_{1,2,n}$ as as u = 1, v = p_1, w = p_2, where $p_1 < p_2$ are two greatest prime less than or equal to n+2, and we label the vertices of N by the remaining labels, which give a prime labeling and hence the considered graph is prime, the lemma follows.

Lemma 5.3. *The union $P_n \cup K_{1,m}$ of paths P_n and stars $K_{1,m}$ is prime for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$.*

Proof. Without loss of generality, we assume that $1 \leq m \leq n$. If m = 1, then it is easy to verify that $P_n \cup K_{1,1} \equiv P_n \cup P_2$, and hence by lemma 4.2, we get $P_n \cup K_{1,1}$ is prime. Now, let $m > 1$ and the vertex sets of $K_{1,m}$ be L = $\{u\}$ and M = $\{u_i : 1 \leq i \leq m\}$, and let the vertex set of P_n be N =$\{v_j : 1 \leq i \leq n\}$, then we label the vertices of the sets L and M as u = 1 and u_i = i + 1 for all $1 \leq i \leq m$, and we label the vertices of the set N by remaining labels, i.e, v_j = j + m for all $2 \leq j \leq n$. Hence we can easily verify that the considered graph is prime, the lemma follows.

Lemma 5.4. *The union $C_n \cup K_{1,m}$ of cycles C_n and stars $K_{1,m}$ is prime for all $n \geq 3$ and $m \geq 1$.*

Proof. Without loss of generality, we assume that $m \leq n$. If m = 1, then it is easy to verify that $C_n \cup K_{1,1} \equiv C_n \cup P_2$, and hence by lemma 4.6, we get $C_n \cup K_{1,m}$ is prime. Now, let $m > 1$ and the vertex sets of $K_{1,m}$ be L = $\{u\}$ and M =$\{u_i : 1 \leq i \leq m\}$, and let the vertex set of C_n be N =$\{v_j : 1 \leq i \leq n\}$, then we label the vertices of the sets L and N as u = p, where p is the greatest prime number in the set $\{1,2,3,\cdots, n+m+1\}$ and v_j = j for all $1 \leq j \leq m$, and we label the vertex set M by remaining labels. Hence we can easily verify that the considered graph is prime, the lemma follows.

Lemma 5.5. *The following graphs are prime:*

(a) $\overline{K_n} \cup K_{1,m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$,
(b) $\overline{K_1} + K_{1,m}$ for all $m \geq 1$,
(c) $P_n \odot \overline{K_1}$ for all $n \geq 1$,
(d) $\overline{K_1} \odot P_n$ for all $n \geq 1$,
(e) $\overline{K_n} \cup \overline{K_m}$ for all $n \geq 1$ and $m \geq 1$.

Proof. (a) Without loss of generality, we assume that $m \leq n$. Now, let the vertex sets of $K_{1,m}$ be L = $\{u\}$ and M =$\{u_i : 1 \leq i \leq m\}$, and let the vertex set of $\overline{K_n}$ be N =$\{v_j : 1 \leq i \leq n\}$, then we label the vertices of the sets L and M as u =1 and u_i = i for $2 \leq i \leq m$, and we label the vertex set N by remaining labels. Hence we can easily verify that the considered graph is prime.

(b) Let the vertex sets of $K_{1,m}$ be L = $\{u\}$ and M =$\{u_i : 1 \leq i \leq m\}$, then we label the vertex of $\overline{K_1}$ as 1, we label the vertex set L as u = p, where p is the greatest prime number in the set $\{1,2,3,\cdots, m+2\}$, and we label the vertex set M by remaining labels. Hence we can easily verify that the considered graph is prime.

(c) We label the vertices of P_n as 1, 3, 5, $\cdots$, 2n-1, and we label the pendent vertices as 2, 4, 6, $\cdots$, 2n. Hence we can easily verify that the considered graph is prime.

(d) The proof follows directly from the fact that $\overline{K_1} \odot \; P_n \equiv P_1 + P_n$ and theorem 4.2.

(e) Without loss of generality, we assume that $m \leq n$. Now, we label the vertices of $\overline{K_m}$ as 1, 2, 3,⋯, m, and we label the vertices of $\overline{K_n}$ as m+1, m+2, m+3, ⋯, n + m. Hence we can easily verify that the considered graph is prime, the lemma follows.

6. Acknowledgment.

Part of the work for this paper was done while the author was visiting the Faculty of Mathematics and information technology, Belgorod States University, Belgorod, Russia. The author would like to thank the Faculty of Mathematics and information technology for its hospitality.

References

1. G. Chartrand, and L. Lesniak, Graphs and Digraphs, 3rd ed. CRC Press (1996).
2. T. Deretsky, S.M. Lee and J. Mitchem, On vertex prime labelings of graphs, in Graph Theory, Combinatorics and Applications,Vol.1, J. Alavi, G. Chartrand, O. Oellerman, and A. Schwenk, eds., Proceeding 6 th International Conference Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York (1991).
3. A.T. Diab and E.A. Elsakhawi, Some Results on Cordial Graphs, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, No.7, pp. 67-87 (2002).
4. A.T. Diab, Study of Some Problems of Cordial Graphs, accepted for publication in Ars Combinatoria.
5. A.T. Diab, On Cordial Labelings of the Second Power of Paths with Other Graphs, accepted for publication in Ars Combinatoria.
6. A.T. Diab, Generalization of Some Results on Cordial Graphs, accepted for publication in Ars Combinatoria.
7. A.T. Diab, On Cordial Labelings of Wheels with Other Graphs, accepted for publication in Ars Combinatoria.
8. A.T. Diab and Sayed Anwer Elsaid Mohammed, On Cordial Labelings of Fans with Other Graphs,accepted for publication in Ars Combinatoria.
9. Joseph A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, Electronic Journal of Combinatorics 14 (2007) # DS6.
10. [4] F. Harary, Graph Theory, Addison - Wesley, Reading, MA (1969).
11. I. Niven and H.S. Zuckerman, An introduction to the theory of numbers, Wiley Eastern Limited, New Delhi (1984).
12. M.A. Seoud, Adel T. Diab, and E.A. Elsakhawi, On Strongly C-Harmonious, Relatively Prime, Odd Graceful and Cordial Graphs, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, No.73, (1998).
13. M.A. Seoud and M. Youssef, On prime labelings of graphs, Congress Numer.,141 (1999).
14. R. Tout, A.N. Dabbaucy and K. Howalla, Prime labeling of graphs, Nat. Acad. Sci. Letters, 5 (11) (1982).
15. M. Youssef, On graceful, harmonious and prime labelings of graphs, Ph. D., thesis, Dept. of Math., Faculty of Science, Ain Shams University, Egypt (2000).

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПЕРВИЧНОЙ МАРКИРОВКЕ ГРАФОВ

АДЕЛЬ Т. ДИАБ

Университет Аин Шамс Факультет естественных наук

e-mail: : adeldiab80@hotmail.com

Граф называется первичным, если он имеет относительтельную первичную маркировку своих граней, удовлетворяющих определенным свойствам. Целью настоящей статьи является описание некоторых новых семейств графов, обладающих первичной маркировкой, в терминах необходимых и достаточных условий.

Ключевые слова: Граф, маркировка граней.

УДК 513.731, 514.752

О СФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_{p+2}$

В.А.ЕСИН

Белгородский государственный университет

e-mail: esin@bsu.edu.ru

В работе рассматривается сферическое отображение поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта данной нормали и распределение, инвариантно связанное с таким отображением.

Ключевые слова: сферическое отображние, аффинная связность.

Присоединим к поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ подвижной репер

$$R = (x, e_i, e_\alpha), \qquad (i, j.k = 1,..., p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2)$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x \in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta \tag{1.1}$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \, (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha) \tag{1.2}$$

где b_{ij}^α – второй основной тензор поверхности. Функции $\gamma_{ij} = e_i e_j$ – компоненты метрического тензора, γ^{ij} – контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k, \quad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i \tag{1.3}$$

Дифференцирование тождеств $e_i e_\alpha = 0$ и $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0 \tag{1.4}$$

Пусть на $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов n. Орт e_{p+2} репера направим по n ,тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной [1]:

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i \tag{1.5}$$

а величины b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2} будут координатами двухвалентных тензоров.

Ковектор c_i задает распределение, которое обозначим Δ_{p-1}

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\bar{V}_p$ поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта e_{p+2} данной нормали. Имеем

$$de_{p+2} = \omega^i_{p+2} e_i + \omega^{p+1}_{p+2} e_{p+1} = (-\gamma^{ij} b^{p+2}_{jk} e_i + c_k e_{p+1})\omega^k = b_k \omega^k$$

где b_k – векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\bar{V}_p$. Векторы $b_{p+2} = e_{p+2}$, $b_{p+1} = c_i b^{ij}_{p+2} e_j + e_{p+1}$ образуют ортогональный базис нормальной плоскости гиперсферического изображения $\bar{V}_p$ (здесь $b^{ij}_{p+2} b^{p+2}_{jk} = \delta^i_k$). Таким образом, на поверхности возникает векторное поле $\xi_{p+2} = c_i b^{ik}_{p+2} e_k$. Аналогично можно рассмотреть векторное поле $\xi_{p+1} = c_i b^{ik}_{p+1} e_k$.

Пусть $a_\alpha = e_\alpha + \xi_\alpha$. Плоскость, натянутую на векторы a_α, обозначим $\overline{N}_2(x)$ (оснащение $\overline{N}_2(x)$).

Отнесем поверхность $\bar{V}_p \subset E_{p+2}$ к реперу $\bar{R} = (x, e_i, a_\alpha)$. В этом репере

$$de_i = \theta^j_i e_j + \theta^\alpha_i a_\alpha = (\theta^j_i + \theta^\alpha_i c_k b^{kj}_{p+1}) e_j + \theta^\alpha_i e_\alpha \tag{1.6}$$

С другой стороны в репере R

$$de_i = \omega^j_i e_j + \omega^\alpha_i e_\alpha \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) в частности следует, что

$$\theta^j_i = \omega^j_i - \omega^\alpha_i c_k b^{kj}_\alpha = \omega^j_i - b^\alpha_{it} c_k b^{kj}_\alpha \omega^t \tag{1.8}$$

Связность на V_p, индуцируемая оснащением $\bar{N}_2(x)$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда $D\theta^i_i = 0$ [3]. С учетом (1.8) это приводит к равенству

$$D(b^\alpha_{it} b^{ki}_\alpha c_k \omega^t) = D(2c_t \omega^t) = 0 \tag{1.9}$$

Но (1.9) означает интегрируемость распределения Δ_{p-1}. Таким образом справедлива

Теорема. *Аффинная связность на $V_p \subset E_{p+2}$, индуцируемая оснащением $\bar{N}_2(x)$, будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда распределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо.*

Для поверхности $V_2 \subset E_4$, отнесенной к сопряженной сети ($b^3_{12} = b^4_{12} = 0$) имеем

$$\xi_3 = c_1 b_3^{11} e_1 + c_2 b_3^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^3} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^3} e_2, \quad \xi_4 = c_1 b_4^{11} e_1 + c_2 b_4^{22} e_2 = \frac{c_1}{b_{11}^4} e_1 + \frac{c_2}{b_{22}^4} e_2$$

Векторные поля ξ_3 и ξ_4 задают на V_2 сеть (ξ_3, ξ_4). Тогда сложное отношение

$$W = (\xi_3, \xi_4, e_1, e_2) = \frac{b_{11}^3 b_{22}^4}{b_{22}^3 b_{11}^4}$$

Ясно, что W=-1 тогда и только тогда, когда

$$b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{22}^3 b_{11}^4 = 0 \qquad (1.10)$$

Но (1.10) означает, что e_3 и e_4 являются главными направлениями присоединенной кривой [4] поверхности $V_2 \subset E_4$. Таким образом, справедлива

Теорема. *Сеть (ξ_3, ξ_4) будет гармонической для сопряженной сети поверхности $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда, когда векторы e_3, e_4 имеют главные направления относительно присоединенной кривой.*

Список литературы

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий.- М., Высшая школа, 1989, 222с.
2. Есин В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$. Тезисы сообщений 9 всесоюзной геометрической конференции. Кишинев, 1988, с.112-113.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности.- М., Наука, 1976, 432с.
4. Фаликова И.Д. О некоторых сетях на поверхности V_2 в E_4. Ученые записки МГПИ, Москва, 1977, с197-211.

ABOUT SPHERICAL MAPPING OF THE $V_p \subset E_{p+2}$ SURFACE

V.A.ESIN

Belgorod State University

e-mail: esin@bsu.edu.ru

In this work a spherical mapping of the $V_p \subset E_{p+2}$ surface is considered by mean its unit normal vector and distribution invariantly related with this mapping.

Key words: spherical mapping, affine connectivity.

УДК : 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О НЕКОТОРЫХ ПРИНЦИПАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.М. МЕЙРМАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

В настоящей работе предлагается новый принцип моделирования фильтрации жидкостей со свободными границами в пористых средах, основанный на точном моделировании процесса на микроуровне с дальнейшей аппроксимацией модели с помощью усреднения. В случае абсолютно твердого пористого тела полученная таким образом модель является известная задача Маскета о совместной фильтрации двух несжимаемых вязких жидкостей различной плотности и различной вязкости. Для упругого пористого скелета предельный режим описывается либо системой уравнений Терцаги - Био для двухскоростного континуума, либо частным случаем этой системы для односкоростного континуумя либо нелокальной системой уравнений вязкоупругости для односкоростного континуума. Все вышеперечислнные системы дополняются уравнением переноса для индикаторной функции, определяющей положение границы раздела двух жидкостей.

Ключевые слова: Уравнения Стокса и Ламэ, двухмасштабная сходимость, задача Маскета.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача о моделировании физических процессов в упругой деформируемой среде Ω, перфорированной системой каналов и пор (упругие пористые среды), заполненных жидкостью или газом. Твердая компонента такой среды Ω_s называется *скелетом грунта*, а область Ω_f, занятая жидкостью-*поровым пространством*. Более точно, мы рассмотрим задачу о совместной фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей. Будем считать, что в каждый момент времени $t > 0$ жидкость с вязкостью μ^+ и плотностью ρ^+ занимает область Ω_f^+, а жидкость с вязкостью μ^- и плотностью ρ^- занимает область Ω_f^-. При этом указанные области разделены поверхностью $\Pi(t)$ так, что

$$\Omega_f = \Omega_f^+(t) \cup \Pi(t) \cup \Omega_f^-(t).$$

Такого рода задачи носят название *задач со свободными (неизвестными) границами*, поскольку в них, наряду с решениями дифференциальных уравнений, необходимо найти и области, в которых определены рассматриваемые дифференциальные уравнения.

В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = L\boldsymbol{w}$$

дифференциальные уравнения математической модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\mathbf{w}$ в области $\Omega \in R^3$ при $t > 0$ имеют вид [1]:

$$\alpha_\tau \bar{\rho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho} \boldsymbol{F}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь и всюду ниже используются обозначения

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + (1 - \bar{\chi})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\mathbb{I},$$

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \quad \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \quad \bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s,$$

$\mathbb{I}$ – шаровой тензор, $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$- характеристическая функция порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$- заданный безразмерный вектор удельных массовых сил, p– давление в сплошной среде,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – постоянная Ламэ твердого скелета, L – характерный размер рассматриваемой области, τ – характерное время процесса, ρ_f и ρ_s – безразмерные плотности жидкости и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0 и g – ускорение силы тяжести. При этом все указанные величины, кроме плотности ρ_f и вязкости μ жидкости являются заданными, в то время как плотность ρ_f и вязкость μ жидкости подлежат определению. Поскольку каждая из рассматриваемых жидкостей является несжимаемой, то уравнением для определения величин ρ_f и μ является стандартное транспортное уравнение

$$\frac{d}{dt}\rho_f \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \frac{d}{dt}\mu = 0,$$

которое с помощью уравнения неразрывности (1.2) примет вид

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_f \boldsymbol{u}\right) = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{u}) = 0. \tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение (1.1) понимается в смысле теории распределений и означает, что вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет уравнению Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \alpha_\lambda \Delta\, \boldsymbol{w} - \nabla p + \rho_s \boldsymbol{F}$$

в твердой компоненте Ω_s ($\bar{\chi} = 0$), а вектор скорости $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет уравнению Стокса

$$\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \alpha_\mu \Delta\, \boldsymbol{u} - \nabla p + \rho_f \boldsymbol{F}$$

в жидкой компоненте Ω_f $(\bar{\chi}=1)$. При этом на общей границе $\Gamma=\partial\Omega_f\cap\partial\Omega_s$ "твердый скелет - поровое пространство" вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет условию непрерывности

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}_0,t)=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma,\qquad t\geq 0,$$

и закону сохранения количества движения в форме

$$[\mathbb{P}\cdot\boldsymbol{n}](\boldsymbol{x}_0,t)=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma,\qquad t\geq 0,$$

где $\boldsymbol{n}(x_0)$ – единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x}_0\in\Gamma$ и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0,t)=\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t)-\varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t),$$
$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_s}}\varphi(\boldsymbol{x},t),\quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f}}\varphi(\boldsymbol{x},t).$$

Более точно, уравнение (1.1) означает выполнение интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T}\Big(\alpha_\tau\bar{\rho}\,\Big(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}-\boldsymbol{F}\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}+\mathbb{P}:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big)dxdt=0$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, финитных в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$.

В этом тождестве через $\mathbb{A}:\mathbb{B}$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е.

$$\mathbb{A}:\mathbb{B}=tr\,(\mathbb{B}^*\circ\mathbb{A})=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}B_{ji}.$$

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ &\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\mathrm{t})=0,\quad \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega,\quad t\geq 0\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

для вектора перемещений сплошной среды и начальным условием

$$\left.\begin{aligned}&\mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^+,\ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^+,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^+(0),\\ &\mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^-,\ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^-,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^-(0)\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

для плотности и вязкости жидкости. В (1.5) ρ_f^+, ρ_f^-, μ^+ и μ^- положительные постоянные и

$$\Omega_f=\Omega_f^+(0)\cup\Pi(0)\cup\Omega_f^-(0).$$

Поверхность $\Pi(0)$ является начальным положением свободной (неизвестной) поверхности $\Pi(t)$, разделяющей две жидкости различной плотности так, что

$$\rho_f(\boldsymbol{x},t)=\rho_f^+ \ \text{ при } \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^+(t),\ \ \rho_f(\boldsymbol{x},t)=\rho_f^- \ \text{ при } \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^-(t),$$

и

$$\mu(\boldsymbol{x},t)=\mu^+ \ \text{ при } \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^+(t),\ \ \mu(\boldsymbol{x},t)=\mu^- \ \text{ при } \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_f^-(t).$$

Совершенно естественно определить области $\Omega_f^+(t)$ и $\Omega_f^-(t)$ как сдвиг вдоль траекторий начальных положений $\Omega_f^+(0)$ и $\Omega_f^-(0)$. Но при этом совсем неочевидно выполнение равенства

$$\Omega_f=\Omega_f^+(t)\cup\Pi(t)\cup\Omega_f^-(t). \tag{1.6}$$

Это связано с тем, что мы упростили исходную задачу постулировав фиксированную структуру порового пространства (см. [1]). В точной постановке и поровое пространство и твердый скелет являются материальными объемами, то есть сдвигом вдоль траекторий поля скоростей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ своего начального положения. Поэтому для таких областей равенство (1.6) выполнено автоматически. Чтобы корректно определить плотность и вязкость жидкости в принятой нами модели, мы постулируем существование поверхности $\widetilde{\Pi}(0)$, разделяющей область Ω на две подобласти $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$ и такой, что

$$\Pi(0)\subset\widetilde{\Pi}(0),\ \ \Omega_f^+(0)\subset\Omega^+(0),\ \ \Omega_f^-(0)\subset\Omega^-(0).$$

Далее вместо начального условия (1.5) рассмотрим начальное условие

$$\left.\begin{aligned}&\mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^+,\ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^+,\ \boldsymbol{x}\in\Omega^+(0),\\ &\mu(\boldsymbol{x},0)=\mu^-,\ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^-,\ \boldsymbol{x}\in\Omega^-(0)\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

и положим

$$\Omega_f^+(t)=\Omega_f\cap\Omega^+(t),\ \ \Omega_f^-(t)=\Omega_f\cap\Omega^-(t),$$

где области $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ есть сдвиг вдоль траекторий поля скоростей сплошной среды начальных положений $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$ соответственно.

Очевидно, что мы можем ограничится только одним уравнением для определения величины ρ_f полагая $\mu=\mu(\rho_f)$ так, что

$$\mu=\mu^+ \ \text{ при } \ \rho_f=\rho_f^+ \ \text{ и } \ \mu=\mu^- \ \text{ при } \ \rho_f=\rho_f^-.$$

В дальнейшем нам будет удобнее функциональная зависимость

$$\alpha_\mu=\alpha_\mu^+ \ \text{ при } \ \rho_f=\rho_f^+ \ \text{ и } \ \alpha_\mu=\alpha_\mu^- \ \text{ при } \ \rho_f=\rho_f^-.$$

Математическая модель (1.1) - (1.4), (1.7) содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

Предположение 1 *Область $\Omega = (0,1)^3$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ и величина $1/\varepsilon$ есть целое число так, что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s есть "твердая" часть Y, и ее "жидкая" часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ между "жидкой" и "твердой" компонентами есть липшецева поверхность.*

Поровое пространство $\Omega_{f,\varepsilon}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет $\Omega_{s,\varepsilon}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а липшецева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_{s,\varepsilon} \cap \partial\Omega_{f,\varepsilon}$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Твердый скелет $\boldsymbol{\Omega_{s,\varepsilon}}$ и поровое пространство $\boldsymbol{\Omega_{f,\varepsilon}}$ являются связными множествами.

В этих предположениях

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}), \quad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ есть характеристическая функция области Y_f в Y, определяющая поровое пространство. В нашей модели функция $\chi(\boldsymbol{y})$ является заданной.

Пусть дополнительно к сделанным предположениям безразмерные величины α_τ, α_μ и α_λ зависят от малого параметра ε и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu^+(\varepsilon) = \mu_0^+, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu^-(\varepsilon) = \mu_0^-,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu^+}{\varepsilon^2} = \mu_1^+, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu^-}{\varepsilon^2} = \mu_1^-.$$

Для характеристики предельных режимов введем следующие величины. Прежде всего построим продолжение $\boldsymbol{v}$ векторнрго поля $\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ из области Ω_f в область Ω_s так, чтобы

$$\bar{\chi}(\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} - \boldsymbol{v}) = 0, \qquad ||\boldsymbol{v}||_{2,\Omega} \leq C||\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}||_{2,\Omega_f}.$$

Векторное поле $\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)=\bar{\chi}\,\boldsymbol{v}$ будем называть *полем скоростей жидкой компоненты*.

Аналогичным образом определяется *векторное поле перемещений твердой компоненты* $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$, как продолжение векторного поля w из области Ω_s в область Ω_f такое, что

$$(1-\bar{\chi})(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_s)=0,\quad ||\boldsymbol{w}_s||_{2,\Omega}\leq C||\boldsymbol{w}||_{2,\Omega_s}.$$

Линейная модель (1.1), (1.2), (1.4) в случае когда рассматривается только одна жидкость (то есть когда $\rho_f^+=\rho_f^-$ и $\mu^+=\mu^-$) была подробно исследована в работах автора [1, 2]. В настоящей работе мы рассматриваем фильтрацию жидкостей, то есть процессы в которых величина α_τ очень маленькая (характерное время процесса τ составляет несколько месяцев). Поэтому вполне разумным является предположение (критерий)

$$\tau_0=0. \tag{1.8}$$

Кроме того будем считать, что

$$\mu_0^+,\ \mu_0^-<\infty,\quad 0<\lambda_0 \tag{1.9}$$

и рассмотрим следующие ситуации:

$$1)\quad \lambda_0=\infty$$

и

$$2)\quad \lambda_0<\infty.$$

Первый случай соответствует абсолютно упругому твердому скелету, когда предельные перемещения твердой компоненты тождественно равны нулю, а предельная скорость жидкой компоненты при

$$\mu_0=0,\ \text{ и }\ 0<\mu_1^+,\ \mu_1^-<\infty$$

удовлетворяет классическому закону фильтрации Дарси.

Следующий случай

$$0<\lambda_0<\infty$$

содержит в себе три различные системы усредненных уравнений, отвечающих различным предельным значениям величины α_μ:

2.1) $\mu_0^+=\mu_0^-=0,\ 0<\mu_1^+,\ \mu_1^-<\infty,$

2.2) $\mu_0^+=\mu_0^-=0,\ \mu_1^+=\mu_1^-=\infty,$

2.3) $0<\mu_0^+,\ \mu_0^-<\infty.$

В первом случае предельным режимом является двухскоростной континуум, описываемый системой уравнений Терцаги-Био (K. Terzaghi, M. Biot) в которой скорость жидкости v_f и перемещения твердой компоненты w_s являются независимыми величинами. Соответствующую математическую модель будем называть *задачей Маскета - Терцаги - Био*. Во втором случае предельным режимом является односкоростной континуум, описываемый той же самой системой уравнений Терцаги-Био, в которой $\boldsymbol{v}_f = m\,\partial \boldsymbol{w}_s/\,\partial t$. Движение жидкости со свободными границами, описываемое этой системой уравнений будем называть *задачей Маскета для упругого режима фильтрации*. Наконец, в третьем случае предельным режимом является односкоростной континуум, описываемый системой уравнений вязкоупругости. Соответственно движение такого континуума со свободными границами назовем *задачей Маскета для вязкоупругого режима фильтрации*.

Отметим, что нам не известны какие-либо строгие результаты о корректной разрешимости в целом по времени, то есть на произвольном интервале времени $(0, T)$, задачи (1.1) - (1.4), (1.7) при фиксированном $\varepsilon > 0$. Конечно же главная причина, почему это невозможно - отсутствие каких-либо априорных оценок решения, в частности, отсутствие закона сохранения энергии в его стандартной форме. Последнее связано с тем, что мы упростили уравнения движения, заменив в них материальную производную вектора скорости на ее частную производную по времени (перейдя от уравнений Навье - Стокса к уравнениям Стокса). Возвращаться к исходной форме уравнений движения не имеет смысла, поскольку сомножитель α_τ при этой производной стремится к нулю при ε стремящемся к нулю. В итоге инерционные слагаемые пропадают и не участвуют в усредненных (предельных) уравнениях движения. Далее возможны различные сценарии. Можно попытаться изменить уравнения движения, рассмотрев вместо уравнения (1.1) уравнение

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho} \boldsymbol{F}. \tag{1.10}$$

Однозначная разрешимость измененной задачи при фиксированном $\varepsilon > 0$ устанавливается достаточно просто. Поэтому после предельного перехода при $\varepsilon \searrow 0$ (если это возможно) достаточно совершить еще один предельный переход при $\tau_0 \searrow 0$ (если это возможно). Таким образом, если каждый шаг в описанной процедуре будет строго обоснован, то наряду с выводом математической модели мы автоматически получим существование (по крайней мере одного) решения этой модели.

По второму сценарию предельный переход при $\varepsilon \searrow 0$ совершается для подобластей, занятых только одной жидкостью (в предположении, что такие области существуют), и уже после этого формулируется задача со свободной границей. При этом математические модели, полученные в каждом из сценариев, совпадают. Только во втором случае вопрос о разрешимости математической модели остается открытым.

2. Задача Маскета (The Muskat problem)

В этом разделе мы рассмотрим первый случай, когда $\lambda_0 = \infty$ и воспользуемся вторым сценарием, описанным выше. Итак, в соответствии с результатами [1] единственным нетривиальным случаем является случай, когда

$$\mu_0 = 0, \text{ и } 0 < \mu_1^+,\ \mu_1^- < \infty$$

и в каждой их подобластей, занятой только одной жидкостью, скорость $\boldsymbol{v}_f$ жидкости удовлетворяет системе уравнений фильтрации Дарси, состоящей из закона Дарси в форме

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}_2 \cdot \left(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}\right), \tag{2.1}$$

и уравнения неразрывности

$$div\, \boldsymbol{v}_f = 0 \tag{2.2}$$

Здесь матрица $\mathbb{B}_2$ определяется из решения стационарной системы уравнений Стокса на элементарной ячейке Y_f:

$$\mathbb{B}_2 = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{e}_i \rangle_{Y_f}, \tag{2.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{U}^i - \nabla Q^i = \boldsymbol{e}_i, \quad div_{\,y}\boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \\ &\boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \quad i = 1,2,3, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

В (2.3) $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ - единичные орты декартовой системы координат, а действие матрицы $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, составленной из произвольных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, на произвольный вектор $\boldsymbol{c}$ определяется формулой

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Безразмерная приведенная вязкость μ_1 зависит от плотности ρ_f так, что

$$\mu_1 = \mu_1^+ \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^+$$

и

$$\mu_1 = \mu_1^- \quad \text{при} \quad \rho_f = \rho_f^-.$$

В свою очередь, плотность ρ_f определяется как решение задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho_f \boldsymbol{v}_f) = 0, \\ &\rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^+, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^+(0),$$

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^-, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^-(0),$$

и

$$\Omega = \Omega^+(0) \cup \widetilde{\Pi}(0) \cup \Omega^-(0).$$

Задача замыкается краевым условием

$$\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega,\ t>0, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ есть вектор единичной нормали к поверхности S в точке $\boldsymbol{x}\in S$.

Проблема (2.1) - (2.6) в научной литературе получила название задачи Маскета (the Muskat problem) [3, 4].

Если в процессе решения задачи определится гладкая (как минимум C^1) поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$, разделяющая две различные жидкости, то полученное решение называется *классическим*. Всякое другое решение называется *обобщенным*.

Для случая движения жидкостей под действием силы тяжести ($\boldsymbol{F}=-g\boldsymbol{e}_3$) и диагональной матрицы $\mathbb{B}_2$ ($\mathbb{B}_2=k\mathbb{I}$) определение классического решения задачи Маскета принимает достаточно простую форму. А именно, ищется поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$, разделяющую область Ω на две подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ так, что давление жидкости p_f является гармонической функцией в каждой из областей $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$:

$$\Delta p_f=0,\quad x\in\Omega^+(t)\cup\Omega^+(t),\ t>0, \tag{2.7}$$

непрерывной при переходе через поверхность $\widetilde{\Pi}(t)$:

$$[p_f](\boldsymbol{x}_0,t)=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\widetilde{\Pi}(t),\ t>0, \tag{2.8}$$

и такой, что

$$\left[\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n}+\rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n})\right](\boldsymbol{x}_0,t)=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\widetilde{\Pi}(t),\ t>0, \tag{2.9}$$

$$-V_n=\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n}+\rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}),\quad \boldsymbol{x}_0\in\widetilde{\Pi}(t),\ t>0, \tag{2.10}$$

где $V_n(\boldsymbol{x}_0,t)$ - скорость перемещения поверхности $\widetilde{\Pi}(t)$ в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности в точке $\boldsymbol{x}_0\in\widetilde{\Pi}(t)$ и $\mu_1=\mu_1^+$, $\rho_f=\rho_f^+$ при $\boldsymbol{x}\in\Omega^+(t)$, $\mu_1=\mu_1^-$, $\rho_f=\rho_f^-$ при $\boldsymbol{x}\in\Omega^-(t)$.

Задача замыкается заданием положения свободной границы $\widetilde{\Pi}(t)$ в начальный момент времени:

$$\widetilde{\Pi}(0)=\widetilde{\Pi}_0 \tag{2.11}$$

и краевым условием

$$\left(\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_f}{\partial n}+\rho_f g(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n})\right)(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in S,\ t>0. \tag{2.12}$$

Локальная разрешимость задачи (2.7) - (2.12) не вызывает особых затруднений [5], в то время как вопрос о существование классического решения на произвольном интервале времени до настоящего времени остается открытым. В отличии от задачи Стефана [6], где существование обобщенного решения доказывается достаточно просто, для задачи Маскета остается открытым и вопрос о существовании обобщенного решения.

3. Задача Маскета-Терцаги-Био

Как было отмечено выше, движение сплошной среды в этой задаче описывается предельным режимом, для которого

$$0 < \lambda_0 < \infty \ \text{ и } \ \mu_0^+ = \mu_0^- = 0, \ \ 0 < \mu_1^+, \qquad \mu_1^- < \infty$$

и скорость жидкости $\boldsymbol{v}_f$ вместе с вектором перемещения твердой компоненты $\boldsymbol{w}_s$ удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе уравнений, состоящей из закона сохранения количества движения для твердой компоненты

$$div\ \left(\widetilde{\mathbb{A}}^s\colon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \widetilde{\mathbb{B}}_0^s div\ \ \boldsymbol{w}_s + m\ \widetilde{\mathbb{C}}_0^s p_f - p\ \mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{3.1}$$

уравнения неразрывности

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0^s\colon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \tilde{b}\,{}_0^s div\ \ \boldsymbol{w}_s + m\,\tilde{c}\,{}_0^s\, p_f = 0, \tag{3.2}$$

для твердой компоненты, уравнения неразрывности

$$div\,\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_f + (1-m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}, \tag{3.3}$$

и закона Дарси

$$\boldsymbol{v}_f = m\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}_2 \cdot \left(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}\right) \tag{3.4}$$

для жидкой компоненты.

Дифференциальные уравнения (3.1) - (3.4) дополняются краевыми условиями

$$\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \ t > 0. \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t > 0, \tag{3.6}$$

для вектора перемещения твердой компоненты $\boldsymbol{w}_s$ и скорости жидкости $\boldsymbol{v}_f$.

В уравнениях (3.1) - (3.4)

$$\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s, \quad \text{а } \ m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})dy \equiv \langle\chi\rangle_{Y_f}$$

-пористость среды, то есть доля порового пространства в общем объеме рассматриваемой среды. Матрица $\mathbb{B}_2$ определена выше формулой (2.4), а симметричный и строго положительно определенный тензор четвертого порядка $\widetilde{\mathbb{A}}^s$, матрицы $\widetilde{\mathbb{B}}_0^s$, $\widetilde{\mathbb{C}}_0^s$ и $\widetilde{\mathbb{E}}_0^s$ и постоянные $\tilde{c}\,{}_0^s$ и $\tilde{b}\,{}_0^s$ находятся из решения периодических краевых задач на элементарной ячейке Y_s [1]:

$$\widetilde{\mathbb{A}}^s = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{3} \left((1-m)\mathbb{J}^{ij} + \langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij})\rangle_{Y_s}\right) \otimes \mathbb{J}^{ij}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\mathbb{B}}_0^s = \lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_0)\rangle_{Y_s}, \quad \widetilde{\mathbb{C}}_0^s = \frac{\lambda_0}{m}\langle \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1)\rangle_{Y_s}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0^s = \sum_{i,j=1}^{3} \langle div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij}\rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}, \tag{3.9}$$

$$\tilde{c}_0^{\,s} = \frac{1}{m}\langle div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_1\rangle_{Y_s}, \quad b_0^s = (1-m) + \langle div_y \boldsymbol{U}_0\rangle_{Y_s}, \tag{3.10}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} div_y\left((1-\chi)(\lambda_0(\mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij}) + \mathbb{J}^{ij}) - \tilde{P}^{ij}\,\mathbb{I})\right) = 0, \\ (1-\chi) div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}^{ij} = 0, \;\; i,j = 1,2,3; \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{array}{l} div_y\left((1-\chi)(\lambda_0 \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_0) - \tilde{P}_0 \mathbb{I})\right) = 0, \\ (1-\chi)(div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_0 + 1) = 0; \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{array}{l} div_y\left((1-\chi)(\lambda_0 \mathbb{D}(y, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1) - \tilde{P}_1 \mathbb{I}) - \chi \mathbb{I}\right) = 0, \\ (1-\chi) div_y \widetilde{\boldsymbol{U}}_1 = 0. \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

Здесь через $\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}$ обозначен тензор четвертого ранга, определяемый по матрицам $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ так, что его свертка с произвольной матрицей $\mathbb{A}$ дается формулой

$$(\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) : \mathbb{A} = \mathbb{B}(\mathbb{C} : \mathbb{A}),$$

а

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ -ортонормированный базис декартовой системы координат.
Наконец, плотность жидкости ρ_f определяется из решения задачи Коши

$$\left.\begin{array}{l} m\,\dfrac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \boldsymbol{u}) = 0, \\ \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \;\; x \in \Omega, \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

где

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^+, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^+(0),$$

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x}) = \rho_f^-, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^-(0),$$

и

$$\Omega = \Omega^+(0) \cup \widetilde{\Pi}(0) \cup \Omega^-(0).$$

Чтобы понять структуру задачи достаточно рассмотреть модельную постановку, в которой задачу Коши (3.14) замыкает неоднородная система уравнений Стокса

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 \Delta \boldsymbol{w}_s - \nabla p + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad div\, \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

для вектора перемещений $\boldsymbol{w}_s(x,t)$ в твердой компоненте и система уравнений фильтрации

$$\left.\begin{array}{l} div\, \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_f + (1-m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}, \\ \boldsymbol{v}_f = m\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}(-\nabla p_f + \rho_f \boldsymbol{F}) \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_f(x,t)$ жидкой компоненты, дополненная краевым условием (3.6).

4. Задача Маскета для упругого режима фильтрации

В настоящем разделе мы рассмотрим случай, когда

$$0 < \lambda_0 < \infty \quad \text{и} \quad \mu_0^+ = \mu_0^- = 0, \;\; \mu_1^+ = \mu_1^- = \infty.$$

Как уже отмечалось выше, предельным режимом здесь является односкоростной континуум, описываемый системой уравнений Терцаги-Био, в которой $\boldsymbol{v}_f = m\ \partial \boldsymbol{w}_s / \partial t$ и $\mu_1 = \infty$. А именно, вектор перемещения $\boldsymbol{w}_s$ и плотность жидкости ρ_f удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе уравнений

$$div\ \left(\tilde{\mathbb{A}}^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + m\, \tilde{\mathbb{C}}_0^s p_f - p\mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{4.1}$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + m\, \tilde{c}\, {}_0^s p_f = 0, \tag{4.2}$$

$$div\ \boldsymbol{w}_s = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.4}$$

и краевому и начальному условиям

$$\boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad \rho_f(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^0(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{4.5}$$

Модельной постановкой здесь будет уравнение (4.4), дополненное системой уравнений Стокса

$$\lambda_0 \Delta \boldsymbol{w}_s - \nabla p + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad div\, \boldsymbol{w}_s = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.6}$$

для вектора перемещений $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t)$ и условиями (4.5).

Задача (4.4) - (4.6) является новой и, на наш взгляд, более "регулярной" по сравнению как с задачей Маскета (2.1) - (2.6), так и с задачей Маскета - Терцаги - Био (3.14) - (3.16).

5. Задача Маскета для вязкоупругого режима фильтрации

В этом последнем разделе мы рассмотрим случай, когда

$$0 < \lambda_0 < \infty \quad \text{и} \quad 0 < \mu_0^+, \qquad \mu_0^- < \infty.$$

Как следует из результатов [1], предельным режимом здесь является односкоростной континуум, описываемым следующей системой уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \nabla p - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = div\ (\widetilde{\mathbb{A}}_2 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \widetilde{\mathbb{A}}_3 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \\ \int_0^t \widetilde{\mathbb{A}}_4(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(x,\tau) d\tau), \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

$$div\ \boldsymbol{w} = 0, \ \ \boldsymbol{y} \in \Omega, \qquad t > 0,$$

где $\widetilde{\mathbb{A}}_2$, $\widetilde{\mathbb{A}}_3$ и $\widetilde{\mathbb{A}}_4$ – тензоры четвертого ранга, причем тензор $\widetilde{\mathbb{A}}_2$ является симметричным и строго положительно определенным. Как обычно, точное выражение этих объектов находится при помощи решений периодических краевых задач на элементарной ячейке Y:

$$\widetilde{\mathbb{A}}_2 = \mu_0 m \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} \langle(\mu_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}_0^{ij}))\rangle_{Y_f} \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

$$\widetilde{\mathbb{A}}_3 = \lambda_0(1-m) \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} - \lambda_0 \mathbb{A}_0^f + \mu_0 \mathbb{A}_1^f(0),$$

$$\widetilde{\mathbb{A}}_4(t) = \mu_0 \frac{d}{dt} \mathbb{A}_1^f(t) - \lambda_0 \mathbb{A}_1^f(t),$$

$$\mathbb{A}_1^f(t) = \sum_{i,j=1}^{3} (\langle \mu_0 \mathbb{D}(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t})\rangle_{Y_f}(t) + \langle \lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{ij})\rangle_{Y_s}(t)) \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

где

$$\left.\begin{array}{c} div\ _y(\chi\mu_0 \mathbb{D}(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t}) + (1-\chi)\lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{ij}) - P^{ij}\,\mathbb{I}) = 0, \\ div\ _y \boldsymbol{W}^{ij} = 0, \ \ \boldsymbol{y} \in Y, \ \ t > 0, \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{W}_0^{ij}(\boldsymbol{y}),\ \ div_{\ y}\left(\chi\left(\mu_0\mathbb{D}\left(y,\boldsymbol{W}_0^{ij}\right)+\mathbb{J}^{ij}\right)\right)=0,\ \boldsymbol{y}\in \mathrm{Y},\quad (5.3)$$

для $i,j=1,2,3$

Система дифференциальных уравнений (5.1) в области Ω замыкается задачей Коши

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho_f\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t})=0,\\ \rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\end{array}\right\}\qquad(5.4)$$

для определения плотности ρ_f и краевым условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in S,\ t>0.\qquad(5.5)$$

Как и в задача Маскета безразмерная вязкость μ_0 зависит от плотности ρ_f так, что

$$\mu_1=\mu_0^+\quad\text{при}\quad\rho_f=\rho_f^+$$

и

$$\mu_1=\mu_0^-\quad\text{при}\quad\rho_f=\rho_f^-.$$

В отличии от задачи (3.15) и (3.16) или задачи (4.5), модельной задачей для системы (5.1), (5.5), описывающей поведение вектора скорости сплошной среды $\boldsymbol{u}=\partial\boldsymbol{w}/\partial t$, является нелокальная системя уравнений Стокса

$$\left.\begin{array}{l}div\,(\mu_0\nabla\boldsymbol{u})-\nabla p+\lambda_0\Delta\boldsymbol{w}+\gamma_0\int_0^t\Delta\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau+\hat{\rho}\boldsymbol{F}=0,\\ div\,\boldsymbol{u}=0,\quad\boldsymbol{x}\in\Omega;\quad\boldsymbol{u}=0,\quad\boldsymbol{x}\in S.\end{array}\right\}\qquad(5.6)$$

Выписанная система является сильно эллиптической в своей главной части и доказательство существования и единственности обощенного решения для задачи (5.4), (5.6) (сформулированного соответствующим образом) не вызывает особых трудностей (см. [7]).

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, проект 08-05-00265.

Список литературы

1. Мейрманов А.М., Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах, Сиб. Мат. Журнал, т. 48 (2007), No. 3, 645 - 667.
2. Мейрманов А.М. Математическое моделирование быстропротекающих процессов фильтрации и акустики в пористых средах, Доклады Академии Наук, т. 417 (2007), No.5, 605 - 608.
3. Muskat, M.Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand, Physics, 5 (1934), 250 - 264.
4. Siegel M., Caflish R.E., Howison S., Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem, Comm. on Pure and Appl. Math.,v. LVII (2004), 1 - 38.
5. Радкевич Е.В. О спектре задачи Веригина-Маскет, Мат. Сб., т. 184 (1993), No. 9, 41 - 88.
6. Мейрманов А.М. Задача Стефана, Наука, Новосибирск, 1986.
7. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V. A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions, Interfaces and Free Boundaries 2, (2000), 413 - 424.

SOME PRINCIPALS FOR MODELING OF FREE BOUNDARY PROBLEMS IN LIQUID FILTRATION

A.M. MEIRMANOV

Belgorod State University

e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

We consider new free boundary problems describing a joint filtration of two immiscible incompressible viscous fluids with different viscosities and densities. On the micro-level the mathematical model consists of Stokes equation in the pore space for the liquid velocity, Lame equation for the displacements of the elastic solid matrix, continuity conditions on the joint boundary "liquid-solid" and transport equations for the unknown density and viscosity of the liquid. The problem is very hard to tackle due to its nonlinearity and the fact that its main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients, both big and small, under the differentiation operators. To simplify the model we suggest a homogenization procedure when the dimensionless size of the pores " tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. Namely, if the solid skeleton is an absolutely rigid body, we arrive at the well – known Muskat problem, which is still unsolved. For the slyghtly viscose liquids we arrive at a new Terzaghi- Biot-Muskat problem, which consist of the Terzaghi-Biot system for the filtration of a viscous liquid in the elastic solid skeleton coupled with the transport equations for the density and viscosity of the liquid, or at a new Muskat model for elastic filtration, which consist of the homogenized Lame equation for the solid component coupled with corresponding transport equations. Finally, for the very viscose liquids the limiting regime described by the system of visco-elasticity for the displacements of the medium coupled with the transport equations for the density and viscosity of the liquid. For this last problem we prove the existence and uniqueness of the generalized solution.

Key words: Lame and Stokes equations, two-scale convergence, Muskat problem.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГОМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А.М. МЕЙРМАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

В настоящей работе изучается движение несжимаемой вязкой жидкости в абсолютно твердом теле, перфорированном системой пор и трещин. Дается строгий вывод усредненных уравнений движения жидкости при стремлении малых параметров ε и δ к нулю в случае, когда область движения жидкости Ω_f определяется периодической системой трещин (периодическое повторение элементарной ячейки εZ_f размера ε, моделирующей систему трещин) и периодической системой пор (периодическое повторение элементарной ячейки δY_f размера δ, моделирующей систему пор)

Ключевые слова: Уравнения Стокса, многомасштабная сходимость.

В настоящей работе рассматривается задача об описании движения несжимаемой вязкой жидкости в абсолютно твердом теле, перфорированном системой пор и трещин. Твердая компонента такой среды называется *скелетом грунта*. В безразмерных (не отмеченных звездочкой) переменных

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}L, \quad t_* = t\tau, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}\frac{L}{\tau}, \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F}g$$

при $t > 0$ дифференциальные уравнения движения для безразмерного вектора скорости жидкости $\mathbf{v}$ и давления q в области Ω_f, занятой жидкостью, имеют вид:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \alpha_\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla q + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0. \tag{1.2}$$

Безразмерные постоянные α_τ и α_μ определяются соотношениями

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_f},$$

в которых L - характерный макроскопический размер (диаметр рассматриваемой области), τ - характерное время физического процесса, ρ_f - средняя плотность жидкости, g - величина ускорения силы тяжести и μ - вязкость жидкости. Дифференциальные уравнения (1.1) - (1.2) замыкаются однородными начальными и граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_f} = 0, \ S_f = \partial\Omega_f. \tag{1.3}$$

Математическая модель (1.1)-(1.3) общепринята и содержит естественные малые параметры δ и ε, которыми являются отношение δ среднего размера пор l_p к характерному размеру L рассматриваемой области: $\delta = l_p/L$ и отношение ε среднего размера трещин l_c к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l_c/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) в точной модели при стремлении малых параметров к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малых параметров задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие предположения. Так, например, если область Ω_f определяется только системой пор и является периодической (аналитически это эквивалентно равенству характеристической функции $\bar{\chi}(\mathbf{x})$ области $\Omega_f = \Omega_f^\delta$ функции $\chi^\delta(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\delta)$, где $\chi(\mathbf{y})$ есть заданная 1-периодическая функция, определяющая элементарную ячейку порового пространства), то предельным режимом будет известная система уравнений фильтрации, состоящая из закона фильтрации Дарси и уравнения неразрывности для предельной скорости жидкости и предельного давления ([1]).

Целью настоящей работы является строгий вывод усредненных уравнений движения жидкости при стремлении малых параметров ε и δ к нулю в случае, когда область движения жидкости Ω_f определяется периодической системой трещин (периодическое повторение элементарной ячейки εZ_f размера ε, моделирующей систему трещин) и периодической системой пор (периодическое повторение элементарной ячейки δY_f размера δ, моделирующей систему пор). Через γ_c обозначим границу между областью Y_f и ее дополнением в Y. Аналогично определяется γ_p. Тогда межфазная граница Γ_f есть периодическое повторение границ $\varepsilon\gamma_c$ и $\delta\gamma_p$. При этом считается, что $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $\delta = \varepsilon$. Такие среды называются *трещиновато-пористыми средами*. Если $\chi_c(\mathbf{z})$-характеристическая функция области Z_c в единичном кубе Z, а $\chi_p(\mathbf{y})$ -характеристическая функция области Y_p в единичном кубе Y, то характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ области движения $\Omega_f = \Omega_f^\varepsilon$ представима в виде

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\delta, \mathbf{x}/\varepsilon) = \chi_c(\mathbf{x}/\varepsilon) + (1 - \chi_c(\mathbf{x}/\varepsilon))\chi_p(\mathbf{x}/\delta). \qquad (1.4)$$

Как и в случае закона Дарси для пористых сред, для трещиновато-пористых сред широко известна феноменологическая модель фильтрации жидкости, предложенная Г.И. Баренблаттом, Ю.П. Желтовым и И.Н. Кочиной [2]. Эта двухскоростная модель, где скорость жидкости $\mathbf{v}_c$ и давление q_c в трещинах и скорость жидкости $\mathbf{v}_p$ и давление q_p в порах удовлетворяют закону Дарси (с различными матрицами проницаемости в трещинах и порах) и неоднородному уравнению неразрывности соответственно в трещинах и в порах. То есть, движение жидкости в целом описывается двумя различными системами уравнений фильтрации для пор и для трещин. Взаимодействие системы пор и системы трещин (перетоки) постулируется неоднородными слагаемыми в уравнениях неразрывности для системы пор и для системы трещин. Как правило эти слагаемые считаются известными функциями, линейно зависящими от разности давлений в порах и трещинах. По аналогии с законом Дарси следует ожидать, что для периодической структуры области движения жидкости при стремлении параметров δ и ε к нулю усредненная система уравнений будет иметь ту же структуру, что и феноменологическя модель фильтрации [2]. На самом деле, как это будет показано ниже, усредненные уравнения в точной модели (1.1)-(1.3) принципиально иные, чем модель Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова и И.Н. Кочиной (см. задачи (7) - (8), (16) - (19) и (20) - (22)).

Пусть выполнены следующие предположения:

1) Вся среда (твердый скелет $\Omega_s = \Omega_s^\varepsilon$, область движения жидкости $\Omega_f = \Omega_f^\varepsilon$ и межфазная граница $\Gamma = \Gamma^\varepsilon$) есть единичный куб $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$.

2) Границы γ_c и γ_p являются липшицевыми поверхностями, область движения Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами, а липшицева межфазная граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \Omega_s^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границ $\varepsilon\gamma_c$ и $\delta\gamma_p$.

3) Функции $\mathbf{F}$ и $\partial\mathbf{F}/\,\partial t$ ограничены в $L^2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

4) $\delta = \varepsilon^r$, $r > 1$, безразмерные параметры зависят от малого параметра ε и

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \tau_0 + \mu_1 < \infty, \tag{1.5}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\tau = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\delta^2} = \mu_2.$$

Очевидно, что при решении реальных физических задач не предполагаются какие-либо предельные переходы. В распоряжении исследователя имеются только конкретные физические постоянные (плотность среды, вязкость жидкости и т. п.) и две переменные величины - характерный размер рассматриваемой области L и характерное время физического процесса τ. Меняя эти переменные величины в пределах применимости математической модели можно определить закономерности в поведении безразмерных комплексов α_μ и α_τ, которые и подскажут выбор того или иного предельного режима в точной модели (1.1)-(1.3). Так, например, все физические процессы в подземных грунтах можно грубо разделить на фильтрацию подземных жидкостей или газов и на распространение сейсмических или акустических волн. Поскольку скорость фильтрации подземных жидкостей составляет несколько метров в год, то для таких процессов характерное время τ является очень большим, что соответствует критерию $\tau_0 = 0$. Напротив, для задач сейсмоакустики характерное время процесса τ не превышает нескольких десятков секунд (скорость распространения акустической волны в грунте составляет несколько километров в секунду), что соответствует критерию $\tau_0 = \infty$.

В настоящей работе рассматриваются задачи фильтрации, то есть медленно текущие процессы, для которых $\tau_0 = 0$. Такие процессы с самого начала можно описывать стационарной системой уравнений

$$\alpha_\mu \Delta\mathbf{v}^\varepsilon - \nabla\, q^\varepsilon + \mathbf{F} = 0, \quad div\ \mathbf{v}^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_f} = 0 \tag{1.6}$$

и искать предельные режимы системы уравнений (1.6) при $\varepsilon \to 0$. Эти режимы зависят от критерия $\mu_1 > 0$. Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{v}^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Перененормировка $\mathbf{v}^\varepsilon = (\varepsilon^2/\alpha_\mu)\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon$ сводит рассматриваемый случай к основному случаю в задаче (1.6), когда $\alpha_\mu = \varepsilon^2$. Итак, пусть $\alpha_\mu = \varepsilon^2$. Величину $\mathbf{v}_c^\varepsilon = \chi_c^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon$ естественно назвать *микроскопической скоростью жидкости в трещинах*, а величину $\mathbf{v}_p^\varepsilon = (1 - \chi_c^\varepsilon)\chi_p^\delta \mathbf{v}^\varepsilon$ - *микроскопической скоростью жидкости в порах*. Соответствующие пределы при $\varepsilon \to 0$ $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}_p$ назовем *скоростью жидкости в трещинах* и *скоростью жидкости в порах*. Используя метод многомасштабной сходимости (обобщение метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [3]), предложенный Дж. Алэйром [4], и неравенство Пуанкаре - Фридрихса для периодических структур, показывается, что единственным предельным режимом в задаче (1.6) (в задаче (1.1) - (1.3) при выполнении критерия $\tau_0 = 0$) является стандартная система уравнений фильтрации

$$\mathbf{v}_c = \mathbb{B}_c^{(1)}(-\nabla\, q + \mathbf{F}), \quad div\ \mathbf{v}_c = 0, \quad (\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.7}$$

для скорости жидкости в трещинах, дополненная равенством

$$\mathbf{v}_p = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом на характерных для теории фильтрации временах все перетоки из пор в трещины и наоборот заканчиваются, поровая жидкость запирается (останавливается) в порах, а жидкость в трещинах движется в соответствии с обычными законами фильтрации (1.7). Утверждение (1.8) о том, что жидкость в порах останавливается понимается асимптотически, то есть как равенства

$$\mathbf{v}_c^{\varepsilon} = \mathbf{v}_c + \mathrm{o}(\varepsilon), \quad \mathbf{v}_p^{\varepsilon} = \mathrm{o}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.9}$$

Равенство (1.8) является следствием предположения о структуре скелета грунта (абсолютно твердое тело) и неравенства Пуанкаре - Фридрихса. Течение в порах возможно лишь при выполнении критерия $\mu_2 < \infty$, что невозможно в силу предположения (1.5). В отличие от стационарного движения (или нестационарного, при выполнении критерия $\tau_0 = 0$), описание совместного движения жидкости в порах и трещинах возможно на малых временах при $\tau_0 > 0$.

Для этого естественным образом определяется обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3). А именно, при каждом $\varepsilon > 0$ скорость $\mathbf{v}^{\varepsilon}$ продолжается нулем в область, занятую твердым скелетом, давление q^{ε} - так, чтобы среднее от давления по области Ω было равным нулю. Далее уравнение (1.1) умножается на произвольную гладкую финитную в области движения функцию $\mathbf{u}$, результат умножения интегрируется по области Ω_T и производные по пространственным переменным перебрасываются на пробную функцию:

$$\int_{\Omega_T} \left(\left(\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}^{\varepsilon}}{\partial t} - \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{u} + \alpha_\mu \nabla \mathbf{v}^{\varepsilon} : \nabla \mathbf{u} - q^{\varepsilon}\, div\ \mathbf{u}\right) dxdt = 0. \tag{1.10}$$

Аналогичным образом переписывается уравнение неразрывности (1.2):

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi\, dxdt = 0. \tag{1.11}$$

Пусть $\mu_2 < \infty$. Следуя [4] заключаем, что существуют 1-периодические по переменным $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ функции $Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ такие, что $q^{\varepsilon} \stackrel{3}{\rightharpoonup} Q$ и $\mathbf{v}^{\varepsilon} \stackrel{3}{\rightharpoonup} \mathbf{V}$ (сходится трехмасштабно) при $\varepsilon \to 0$. При этом

$$\mathbf{v}_c = \int_{Z_f} \int_Y \mathbf{V} dzdy, \quad \mathbf{v}_p = \int_{Z_s} \int_{Y_f} \mathbf{V} dzdy. \tag{1.12}$$

С помощью критерия $\mu_0 = 0$ из интегрального тождества (1.10) выводится представление

$$Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = q(\mathbf{x}, t) \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \tag{1.13}$$

Функция $\mathbf{V}$ определяется из системы микроскопических уравнений

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mu_2 \Delta_y \mathbf{V} - \nabla_y \Pi^{(p)} - \nabla_z \Pi^{(c)} - \nabla q + \mathbf{F}, \tag{1.14}$$

$$div_{\,y}\, \mathbf{V} = 0, \quad div_{\,z}\, (\textstyle\int_Y \mathbf{V} dy) = 0 \tag{1.15}$$

в области $\{\mathbf{z} \in Z, \mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1\}$ наряду с 1 - периодическими по переменным $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ функциями $\Pi^{(p)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\Pi^{(c)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Уравнение (1.14) получается после предельного перехода в тождестве (1.10), если в качестве пробных функций выбрать функции $\mathbf{u} = h(\mathbf{x}, t)(\nabla\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon) \times \nabla\psi(\mathbf{x}/\delta))$, а уравнения (1.15) получаются после предельного перехода в тождестве (1.11), если в качестве пробных функции выбрать функции $\delta h(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)\psi(\mathbf{x}/\delta)$ и $\varepsilon h(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и далее воспользовatся результатами [4].

Усредненное уравнение движения жидкости в системе пор получаются после решения системы микроскопических уравнений (1.14) - (1.15), если воспользоваться формулами (1.12):

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}_p^{(1)}(t - \tau) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F})(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \tag{1.16}$$

если $\mu_2 > 0$ и

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_p^{(2)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, 0) = 0 \tag{1.17}$$

если $\mu_2 = 0$. Аналогично образом выводится усредненное уравнение движения жидкости в системе трещин:

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_c^{(2)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, 0) = 0. \tag{1.18}$$

Уравнения (1.16) - (1.18) замыкаются уравнением неразрывности и краевым условием на внешней границе области движения:

$$div\ (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_p) = 0, \quad (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.19}$$

Если $\mu_2 = \infty$, то, как и в стационарном случае, жидкость в порах запирается а жидкость в трещинах движется согласно уравнению

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}_c^{(3)}(t - \tau) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F})(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \tag{1.20}$$

если $\mu_1 > 0$ и уравнению

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} = (m\mathbb{I} - \mathbb{B}_c^{(4)}) \cdot (-\nabla q + \mathbf{F}), \quad \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, 0) = 0 \tag{1.21}$$

если $\mu_1 = 0$. Как и выше равнение (1.20) (или уравнение (1.21)) замыкается уравнением неразрывности и краевым условием на внешней границе области движения:

$$div\ \mathbf{v}_c = 0, \quad (\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.22}$$

Таким образом, как мы уже отмечали выше, все предельные режимы в модели (1.1) - (1.3) принципиально отличаются от феноменологической модели, предложенной в [2]. Во-первых, во всех предельных режимах присутствует только одно давление, общее и для системы пор и для системы трещин. Во-вторых, при определенных соотношениях на параметры задачи жидкость в порах запирается и основным является движение жидкости в трещинах. Все вышесказанное сформулируем в следующем утверждении.

Теорема 1 *Пусть выполнены предположения* ***1) - 4)****. Тогда*

I) *если* $\tau_0 = 0$*, то единственным предельным режимом в задаче (1.1) - (1.3) при* $\varepsilon \to 0$ *является система уравнений фильтрации (1.7) для скорости и давления жидкости в трещинах, в которой матрица* $B_c^{(1)}$ *однозначно определяется из решения микроскопической системы уравнений на элементарной ячейке* Z_f*;*

II) *если* $\tau_0 > 0$ *и* $\mu_2 < \infty$*, то предельными режимами в задаче (1.1) - (1.3) при* $\varepsilon \to 0$ *является система уравнений (1.16), (1.18), (1.19) при* $\mu_2 > 0$ *и система уравнений (1.17) - (1.19) при* $\mu_2 = 0$*, в которых матрица* $B_c^{(2)}$ *однозначно определяется геометрией системы трещин;*

III) *если* $\tau_0 > 0$ *и* $\mu_2 = \infty$*, то предельными режимами в задаче (1.1) - (1.3) при* $\varepsilon \to 0$ *является система уравнений (1.20), (1.22) при* $\mu_1 > 0$ *и система уравнений (1.21), (1.22) при* $\mu_1 = 0$*, в которых матрицы* $B_c^{(3)}$ *и* $B_c^{(4)}$ *однозначно определяются геометрией системы трещин.*

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, проект 08-05-00265.

Список литературы

1. Sanchez-Palencia E. Неоднордные среды и теория колебаний. Москва, Мир, 1984 295 стр.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.ПММ, т.24 (1960), вып. 5, 852–864.
3. Nguetseng G. SIAM J. Math. Anal., 1989 V.20, pp. 608–623.
4. Allaire G. Proceed. of Royal Soc. Edinburgh, 126A (1996), pp. 297–342.

APPLICATION OF THE MULTI-SCALE CONVERGENCE METHOD FOR A DISCRIPTION OF LIQUID FILTRATION IN CRACKED-POROUS MEDIA

A.M. MEIRMANOV

Belgorod State University

e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Stokes system of differential equations describing a motion of slightly compressible viscous fluid occupying cracked-porous space in an absolutely rigid body is considered. We suppose that the dimensionless size δ of pores depends on the dimensionless size ε of cracks: $\delta = \varepsilon^r$ with $r > 1$. The rigorous justification is fulfilled for homogenization procedure as the dimensionless size of the cracks tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. As the results, we derive different types of homogenized equations (double-porosity models of liquid filtration), depending on ratios between physical parameters. These models describe two-velocity continuum, where the velocity of the liquid in pores and the velocity of the liquid in cracks are independent and each of them satisfy well-known Darsy's law of filtration or different types of momentum conservation law. The principal moment here is that the pressure in pores coincides with the pressure in cracks. The proofs are based on Allaire's multi-scale convergence method of homogenization in periodic structures.

Key words: Stokes equations, multi-scale convergence.

УДК 517, 517.9

К СВОЙСТВАМ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.З. МЕШКОВ, И.П. ПОЛОВИНКИН

Воронежский государственный университет

e-mail: polovinkin@yandex.ru

В рамках символического подхода к формулам средних значений предложен способ получения новых формул среднего значения для гармонических функций.

Ключевые слова: теорема о среднем, гармонические функции, дифференциальные уравнения.

Введение

Настоящая работа посвящена формулам среднего значения для решений линейных уравнений в частных производных, прежде всего, для уравнения Лапласа. В разных разделах и прикладных задачах под понятиями "формула среднего", "теорема о среднем" часто подразумевают несколько разнородные факты. Так или иначе, многообразные результаты для различных типов уравнений объединяет то, что в них участвует среднее (возможно, с весом) достаточно гладкой функции по некоторому множеству, чаще всего по сфере.

Теоремы о среднем для эллиптических уравнений наиболее широко известны. Базовым для использования в приложениях является следующий классическая теорема о среднем (см., напр.,[1]), восходящая к Гауссу: для того, чтобы непрерывная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $u(x)$ была гармонической в Ω, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in \Omega$ и всякого значения $r > 0$, такого, что замыкание шара $B(x,r) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon |\xi - x| < r\}$ вложено в Ω, ее значение в точке x равнялось среднему по границе шара (по шару). Этот факт обобщается на эллиптические уравнения второго порядка. В работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева (см. [2] – [7]) устанавливались формулы среднего для эллиптических операторов более общего вида. Эти формулы использовались авторами при изучении вопросов, связанных со спектральным разложением по собственным функциям эллиптических операторов. Кроме того, теорема о среднем указанного типа переносится и на римановы многообразия (см. [8], [11]).

1. Понятие сопровождающего распределения оператора

Следуя [9], будем через K обозначать пространство финитных основных функций переменных $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, через S – пространство Шварца быстро убывающих основных функций, через K', S' – соответствующие двойственные пространства распределений.

Через $\hat{f}$ будем обозначать преобразование Фурье распределения $f \in S$. Этим же символом $\hat{f}(w)$ мы будем пользоваться и для обозначения преобразования Фурье - Лапласа распределения f с компактным носителем, представляющего собой в этом случае целую аналитическую функцию комплексной переменной $w \in \mathbb{C}^n$(см. [10]). Далее, пусть

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1, \dots, n,\ D = (D_1, \dots, D_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Всюду далее в этой работе предполагается, что мультииндекс α имеет неотрицательные целые координаты. Через $S_R(x_0)$ мы обозначаем сферу в $\mathbb{R}^n$, через $|S_n|$ – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Через $\delta(x - x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0, через $\delta_{S_R(x_0)}(x)$ – мера Дирака, сосредоточенная на сфере $S_R(x_0)$.

Предлагаемый в настоящей работе подход к теоремам о среднем значении можно выразить следующим образом. Тот или иной факт, затрагивающий средние значения решения линейного однородного дифференциального уравнения, мы связываем с существованием некоторого специально подобранного распределения, действие которого на решения уравнения равно нулю. Более точно, примем следующее определение.

Пусть $P(w)$ однородный многочлен порядка m. Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = 0. \tag{1.1}$$

Определение 1. *Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим уравнение (1.1), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство*

$$\langle \Phi, u \rangle = 0. \tag{1.2}$$

Будем также в этом случае называть распределение Φ сопровождающим оператор $P(D)$ или, короче, сопровождением оператора $P(D)$ и уравнения (1.1).

Отметим сразу же, что для любого многочлена $P(D)$ существуют тривиальные сопровождающие распределения вида $Q(D)P(D)\delta(x - x_0)$, где $\delta(x - x_0)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0, $Q(D)$ – произвольный многочлен. Между тем теорема о среднем для бесконечно дифференцируемых решений эквивалентна существованию некоторого нетривиального сопровождающего распределения.

Пример 1. Для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

имеет место следующее утверждение (теорема о среднем, или одномерный принцип Асгейрсона): для того, чтобы функция $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ являлась решением уравнения (1.3), необходимо и достаточно, чтобы для каждого прямоугольника, образованного прямыми $x \pm y = const$, выполнялось равенство

$$u(M_1) + u(M_3) - u(M_2) - u(M_4) = 0, \tag{1.4}$$

где $M_k = (x_k, y_k) (k = 1,2,3,4)$ суть последовательно пронумерованные вершины этого прямоугольника.

Подвергнув решение уравнения (1.3) более жесткому требованию $u(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, нетрудно заметить, что необходимость равенства (1.4) эквивалентна утверждению о том, что распределение

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1}\delta(M - M_k), \tag{1.5}$$

где $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, является сопровождающим для уравнения (1.3).

Пример 2. Теорема о среднем для уравнения Лапласа имеет следующий вид: Для того, чтобы функция $\mathrm{u} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ являлась решением уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $R > 0$ и для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имело место равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(x)\, dS_x, \tag{1.7}$$

где dS_x – элемент площади поверхности сферы $S_R(x_0)$ с центром в точке x_0 и радиусом R.

Отсюда непосредственно вытекает, что распределение

$$\delta(x - x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x) \tag{1.8}$$

является сопровождающим для оператора Лапласа Δ.

Приведенных примеров достаточно, чтобы составить представление о предлагаемом здесь подходе к теоремам о среднем, связанном с сопровождающими распределениями, изучению которых мы уделим внимание ниже. Базовым результатом для нижеследующего повествования будет следующее утверждение, доказанное в [12].

Теорема 1. *Для того, чтобы распределение Ф компактным носителем являлось сопровождающим уравнение (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\frac{\widehat{\Phi}(w)}{P(w)},\ w \in \mathbb{C}^n \tag{1.9}$$

была целой аналитической.

2. О получении новых формул средних для гармонических функций.

Теорема 1 теоретически дает возможность получения новых формул средних для линейных однородных дифференциальных операторов. Для получения такой формулы нужно задать целую аналитическую функцию, которая делится нацело на символ заданного оператора и применить к ней обратное преобразование Фурье, в результате чего мы и получим сопровождающее распределение оператора, а значит, формулу среднего для него. На практике эта схема может натолкнуться на технические трудности. Здесь мы укажем, как эта схема может быть сравнительно легко реализована для оператора Лапласа.

Зададим некоторое сферически симметричное относительно заданной точки (без ограничения общности ее можно считать началом координат) распределение $\Xi(x)$ с компактным носителем. Пусть $\hat{\Xi}(\omega)$ – образ Фурье распределения $\Xi(x)$. Наше предположение о сферической симметрии означает, что распределение $\Xi(x)$ можно считать условно зависящим от $r=|x|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$. В связи с этим мы будем пользоваться обозначением $\Xi(r)$. Предположим также, что распределение $\Xi(r)$ удовлетворяет условию четности по переменной r. В таком случае образ $\hat{\Xi}(\omega)$ представляет собой четную аналитическую функцию переменной $s=|\omega|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2}$, которая может быть найдена с помощью применения к распределению $\Xi(r)$ преобразования Ганкеля (см. [9]). Для этой функции мы будем использовать обозначение $\hat{\Xi}(s)$. Разложим функцию $\hat{\Xi}(s)$ в степенной ряд:

$$\hat{\Xi}(s)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k s^{2k}$$

Теперь ясно, что целая аналитическая функция

$$\hat{\Phi}(s)=\hat{\Xi}(s)-a_0$$

делится нацело на s^2, то есть на символ оператора Лапласа. То, что функция $\hat{\Phi}(s)$ представляет собой образ Фурье некоторого компактного распределения $\Phi(r)$, доказывается, как и при доказательстве теоремы 1. Впрочем, и без того ясно, что прообраз функции $\hat{\Phi}(s)$ будет иметь вид

$$\Phi(r)=\Xi(r)-a_0\delta(x).$$

Остается заметить, что

$$a_0=\hat{\Xi}(0)=\langle\Xi,1\rangle.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть распределение $\Xi(x)$ с компактным носителем удовлетворяет условиям сферической симметрии и четности по переменной $r=|x-x^{(0)}|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k-x_k^{(0)})^2}$. Тогда распределение*

$$\Phi(x)=\Xi(x)-a_0\delta(x),$$

где

$$a_0=\langle\Xi,1\rangle,$$

представляет собой сопровождение оператора Лапласа, то есть имеет место формула следующая среднего для гармонической функции:

$$\langle\Phi(x),u\rangle=0.$$

Пример 3.

Пусть

$$\Xi(x)=\begin{cases}h^2-|x|^2, & \text{если } |x|\le h;\\ 0, & \text{если } |x|>h.\end{cases}$$

Тогда

$$\hat{\Xi}(s)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}\int_0^h r^{n/2}(h^2-r^2)J_{\frac{n-2}{2}}(rs)\,dr=$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^h r^{n-1}(h^2 - r^2) j_{\frac{n-2}{2}}(rs)\, dr,$$

где $j_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν, определенная формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) =$$

$$= \Gamma(\nu+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма - функция Эйлера, $J_\nu(\cdot)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$a_0 = \hat{\Xi}(0+) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^h r^{n-1}(h^2 - r^2)\, dr = |S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} \ .$$

Отсюда следует, что распределение вида

$$\Phi(x - x^{(0)}) = \Xi(x - x^{(0)}) - |S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} \delta(x - x^{(0)})$$

является сопровождением оператора Лапласа. Следовательно, имеет место формула среднего для гармонической функции вида

$$|S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} u(x^{(0)}) = \int_{|x-x^{(0)}| \le h} (h^2 - r^2) u(x)\, dx.$$

3 Замечания об обращении теорем о среднем

Относительно обращения теорем о среднем можно заметить следующее. Пусть имеется некоторое семейство сопровождений оператора $P(D)$, зависящих от точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и от некоторого параметра $\mu \in \Lambda$. Обозначим через $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$ сопровождение из этого семейства. Относительно множества Λ мы будем предполагать, что имеет смысл предельный переход по этому множеству при $\mu \to \mu_0$, где μ_0 – предельная точка множества Λ.

Теорема 3. *Пусть функция $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ для каждого сопровождения $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \mu \in \Lambda$ удовлетворяет соотношению*

$$\left\langle \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x), u(x) \right\rangle = 0,$$

причем семейство сопровождений $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \Lambda$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x) = P(D)\delta(x - x^{(0)}).$$

Тогда функция $u(x)$ является решением уравнения

$$P(D)u = 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x) = P(D)\psi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, где $\psi_{\mu,x^{(0)}}(x)$ – некоторое распределение с компактным носителем. Поэтому из условий теоремы получим:

$$\left\langle \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x), u(x) \right\rangle = 0.$$

Переходя к пределу при $\mu \to \mu_0$ в этом равенстве, получим

$$0 = \left\langle P(D)\delta(x - x^{(0)}), u(x) \right\rangle =$$

$$= (-1)^m \left\langle \delta(x - x^{(0)}), P(D)u(x) \right\rangle = (-1)^m P(D)u(x^{(0)}),\ \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

В силу произвольности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ теорема доказана.

Список литературы

1. Гилбарг Д., Трудингер П. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464с.
2. Ильин В.А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами // Дифференциальные уравнения. – 1969. - Т. 5, N 11. – С. 1940 - 1978.
3. Ильин В.А. Некоторые свойства регулярного решения уравнения Гельмгольца в плоской области // Математич. заметки. – 1974. - Т. 15, N 6. – С. 885 - 890.
4. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Об одном обобщении формулы среднего значения для регулярного решения уравнения Шредингера. – ИПМ АН СССР, 1977. – С. 157 - 166.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Формула среднего значения для присоединенных функций оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. - 1981. – Т. 17, N 10. – С. 1908 - 1910.
6. Моисеев Е.И. Формула среднего для собственных функций эллиптического самосопряженного оператора второго порядка // Докл.АН СССР. – 1971. – Т. 197, N 3. – с. 524 - 525.
7. Моисеев Е.И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, N 5. – С. 827 - 844.
8. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964. - 534 с.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Государственное издательство физико - математической литературы, 1958. – 440 с.
10. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
11. Иванов Л. А., Половинкин И. П. О некоторых свойствах оператора Бельтрами в римановой метрике //Доклады Академии наук РФ. - 1999, - Т. 365, N 3. - С. 306 - 309.
12. Мешков В.З., Половинкин И.П. К свойствам решений линейных уравнений в частных производных // Черноземный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". – 2007. - Вып. 1 (5). – С. 3 - 11.

ABOUT PROPERTIES OF MEAN VALUES OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.Z. MESHKOV, I.P. POLOVINKIN

Voronezh State University

e-mail: polovinkin@yandex.ru

We derive new mean value theorems for harmonic functions by a symbolic method based on distribution theory.

Keywords: mean value theorem, harmonic functions, distribution theory,differential equations.

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ С ДВОИЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПРОСТЫМИ РАЗНОСТЯМИ [1]

А. П. НАУМЕНКО

Белгородский государственный университет

e-mail gritsenko@bsu.edu.ru

Пусть N_0 – множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1. Пусть p – нечетное простое число, a – целое число. В статье получена асимптотическая формула для суммы

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\,p)\\ n\in N_0}} 1,$$

остаточный член которой в некоторых случаях уточняет остаточный член известной формулы А.О. Гельфонда.

Ключевые слова: натуральные числа, асимптотическая формула, преобразование Абеля.

Введение

В 1968 г. А.О. Гельфонд доказал следующую теорему [1]:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,m)\\ n\in N_0}} 1=\frac{X}{2m}+O(X^{\lambda}), \tag{1.1}$$

где $\lambda=\frac{\ln 3}{\ln 4}=0.792\ldots$

В случае, когда 2 является первообразным корнем по модулю p и $m=p$ в работе [2] для суммы в левой части (1.1) получена асимптотическая формула с остаточным членом

$$O(X^{\eta}),$$

где $\eta=\frac{\log_2 p}{p-1}$, постоянная в знаке O зависит только от p, которая в данном частном случае уточняет остаточный член формулы Гельфонда.

Целью настоящей работы является перенос результата [2] на случай произвольных простых разностей арифметических прогрессий. Здесь мы допускаем, что 2 не является первообразным корнем по модулю p.

В статье будут использованы следующие обозначения.

N_0 – множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1.

---

[1]Работа выполнена при поддержке БелГУ, грант ВКАС-26-08

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in N_0 \\ -1, & \text{если } k \notin N_0 \end{cases}$$

Пусть n - нечетное натуральное число. Пусть 2 принадлежит показателю $\delta(n)$ по модулю n. Тогда $k(n) = \frac{\varphi(n)}{\delta(n)}$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая уточняет (1.1) для частного случая.

Теорема 1 *Пусть* p *- нечетное простое число. Пусть* a *- произвольное целое число из отрезка* $[0; p-1]$. *Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n \le X \\ n \equiv a (\operatorname{mod} p) \\ n \in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + O(X^{M(p)}),$$

где

$$M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p + 1}{(p-1)\ln 2}.$$

постоянная в знаке O *зависит только от* p.

В случае $k(p) < \frac{(p-1)\ln 3 - 1}{6\sqrt{p}\ln p}$ и при достаточно больших X остаточный член нашей асимптотической формулы точнее, чем в (1.1).

1. Леммы

Справедливо тождество

$$\sum_{\substack{0 \le n \le 2^Q - 1 \\ n \equiv a (\operatorname{mod} b)}} \varepsilon(n) = \sum_{n=0}^{2^Q-1} \varepsilon(n) \frac{1}{b} \sum_{c=1}^{b} e^{2\pi i c \frac{n-a}{b}} =$$

$$= \frac{1}{b} \sum_{c=1}^{b} e^{-2\pi i \frac{ca}{b}} \sum_{n=0}^{2^Q-1} \varepsilon(n) e^{2\pi i \frac{cn}{b}}. \qquad (1.2)$$

Лемма 1

$$S_Q(\alpha) = \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod_{r=0}^{Q-1} \left(1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}\right). \qquad (1.3)$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции по Q.

При $Q = 1$ имеем

$$\sum_{0 \le n < 2} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod_{r=0}^{0} \left(1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}\right).$$

Пусть при некотором $Q \ge 1$ лемма справедлива. Проверим ее справедливость для $Q + 1$:

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} + \sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Заметим, что

$$\varepsilon(2^Q+n) = -\varepsilon(n),$$

так как $n < 2^Q$.

Далее,

$$\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} + \sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} =$$

$$\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} - e^{2\pi i\alpha 2^Q}\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} =$$

$$= \left(1-e^{2\pi i\alpha 2^Q}\right)\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Но, по предположению индукции,

$$\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q-1}\left(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q}\left(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}\right).$$

Лемма доказана.

Из нее следует равенство

$$\left|\sum_{0\le n<2^{Q}} \varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}\right| = \prod_{r=0}^{Q-1}\left|1-e^{2\pi i\alpha 2^r}\right| = \prod_{r=0}^{Q-1}\left|e^{2\pi i\alpha 2^r}-1\right| = \qquad (1.4)$$

$$= \prod_{r=0}^{Q-1}\left|2ie^{\pi i\alpha 2^r}\left(\frac{e^{\pi i\alpha 2^r}-e^{-\pi i\alpha 2^r}}{2i}\right)\right| = 2^Q\prod_{r=0}^{Q-1}|\sin\pi\alpha 2^r|.$$

Лемма 2 *Пусть n–натуральное число, x,y–комплексные числа. Тогда*

$$x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(xe^{2\pi i\frac{k}{n}} - ye^{-2\pi i\frac{k}{n}}\right).$$

Доказательство см. [3],с.78.

Лемма 3 *Пусть c – целое число такое, что $(c,p)=1$. Справедливо тождество*

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1}\left|\sin\frac{\pi c2^r}{p}\right| = \left(\prod_{x=1}^{p-1}\left|\sin\frac{\pi cx^{k(p)}}{p}\right|\right)^{\frac{1}{k(p)}}.$$

Доказательство.

Отметим, что $|\sin\frac{\alpha\pi}{p}|$ зависит только от остатка α при делении на p.

Пусть g - первообразный корень по модулю p. Пусть $ind_g\ 2 = s$, то есть $g^s \equiv 2(\mathrm{mod}\, p)$. Так как 2 принадлежит показателю $\delta(p)$ по модулю p, то $2^{\frac{p-1}{k(p)}} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Имеем

$$g^{\frac{s}{k(p)}(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p),$$

откуда $s = k(p)s_1$, где s_1 - натуральное число.

Известно(см. [4, с. 92]) , что

$$ind\ 2^r \equiv r\ ind\ 2(\mathrm{mod}(p-1)).$$

Поэтому при любом целом $r \geq 0$ справедливо

$$ind\ 2^r = q(p-1) + rk(p)s_1.$$

Так как $p - 1 = k(p)\delta(p)$, приходим к равенству

$$ind\ 2^r = (q\delta(p) + rs_1)k(p).$$

Таким образом, ввиду $(k(p), p-1) = k(p)$, при любом целом $r \geq 0$ сравнение

$$x^k(p) \equiv 2^r(\mathrm{mod}\, p)$$

имеет ровно $k(p)$ решений (см. [4, с. 94]).

Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть p - нечетное простое число и n - некоторое натуральное число, α - целое число такое, что $(\alpha, p) = 1$.*

Т

огда справедлива оценка

$$|S| = \left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha x^n}{p}}\right| \leq n\sqrt{p}.$$

Доказательство.

Пусть $y < p$. Тогда справедливо тождество

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}.$$

Далее имеем

$$S = \frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}.$$

Из неравенства треугольника следует оценка

$$|S| \leq \frac{1}{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha y^n x^n}{p}}\right|.$$

Обозначив через $J(\lambda)$ число решений сравнения $y^n \equiv \lambda(\mathrm{mod}\, p)$ имеем

$$|S| \leq \frac{1}{p-1}\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x^n}{p}}\right|.$$

Воспользовавшись неравенством Коши, приходим к оценке

$$S^2 \leq \frac{1}{(p-1)^2}\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)^2 \sum_{\lambda=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x^n}{p}}\right|^2.$$

Заметим, что $J(\lambda) \leq n$.

Таким образом

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda)^2 \leq n\sum_{\lambda=1}^{p-1} J(\lambda) = n(p-1).$$

Также справедливо тождество

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x^n}{p}}\right|^2 = \sum_{x_1=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x_1^n}{p}}\sum_{x_2=1}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x_2^n}{p}}.$$

Приходим к неравенству

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1}\left(\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\, x^n}{p}}\right)^2 \leq \sum_{x_1=1}^{p-1}\sum_{x_2=1}^{p-1}\sum_{\lambda=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{\alpha\lambda\,(x_1^n-x_2^n)}{p}} \leq np(p-1).$$

Таким образом

$$S^2 \leq n^2 p,$$

откуда имеем необходимую оценку

$$|S| \leq n\sqrt{p}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть* p *- нечетное простое число,* k *- произвольное натуральное число,* c *- целое число такое, что* $(c,p) = 1$.

Тогда

$$\prod_{x=1}^{p-1}\left(1 - e^{2\pi i\frac{cx^k}{p}}\right) \leq ep^{3k\sqrt{p}}.$$

Доказательство.

Справедливо тождество

$$\ln \prod_{x=1}^{p-1} (1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}) = \sum_{x=1}^{p-1} \ln(1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}).$$

Пусть $z = e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}$.

Разложим $\ln(1 - z)$ в ряд Тейлора

$$\ln(1 - z) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l}.$$

Докажем, что этот ряд сходится.

Действительно,

$$\left|\sum_{l \leq N} z^l\right| \leq \frac{2}{|1-z|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{\pi}{p}|},$$

так как $(cx^k, p) = 1$.

Теперь сходимость ряда следует из признака Дирихле (см. [5], с.336) которым мы пользуемся после разделения действительной и мнимой частей.

Пользуясь преобразованием Абеля в интегральной форме, имеем

$$\left|\sum_{p^2 < l < \infty} \frac{z^l}{l}\right| = \left|\int_{n^2}^{\infty} \left(\sum_{p^2 < l \leq u} z^l\right) \frac{du}{u^2}\right| \leq \frac{1}{p^2 |\sin\frac{\pi}{p}|} \leq \frac{1}{p}.$$

Приходим к равенству

$$\sum_{x=1}^{p-1} \ln(1 - e^{2\pi i \frac{cx^k}{p}}) = -\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l} + O(1).$$

Теперь достаточно оценить сумму

$$\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l}.$$

Сделаем суммирование по l внешним, тогда

$$\sum_{x=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}}{l} = \sum_{l=1}^{p^2-1} \frac{1}{l} \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}}.$$

Пусть $l = l_1 p$.

В этом случае

$$\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{lcx^k}{p}} = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i l_1 cx^k} = p - 1.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=p}}^{p^2-1}\frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{l_1=1}^{p-1}\frac{1}{l_1}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i l_1 cx^k}=\frac{p-1}{p}\sum_{l_1=1}^{p-1}\frac{1}{l_1}.$$

Заметим, что для любого x справедливо

$$\sum_{i=1}^{x}\frac{1}{i}\leq \ln x+\gamma+\frac{1}{x},$$

где $\gamma = 0.57\ldots$ - постоянная Эйлера.

Таким образом, приходим к оценке

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=p}}^{p^2-1}\frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\leq \ln p+\gamma+\frac{1}{p}.$$

Пусть теперь $(l,p)=1$.

В этом случае, пользуясь леммой 4, имеем

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right|\leq k\sqrt{p}.$$

Справедлива оценка

$$\left|\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p^2-1}\frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right|\leq \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p^2-1}\frac{1}{l}\left|\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right|\leq k\sqrt{p}\left(2\ln p+\gamma+\frac{1}{p^2}\right).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{l=1}^{p^2-1}\frac{1}{l}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{lcx^k}{p}}\right|\leq 3k\sqrt{p}\ln p.$$

Лемма доказана.

Лемма 6 *Пусть* p *- нечетное простое число. Пусть* c *- целое число и* $(c,p)=1$.*Тогда справедлива оценка*

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1}|1-e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}|\leq e^{\frac{1}{k(p)}}p^{3\sqrt{p}}.$$

Доказательство.

Из тождества (1.4) и леммы 3 имеем

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} |1-e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}| = \left(\prod_{r=0}^{p-2} |1-e^{\frac{2\pi i c 2^r}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} = \left(\prod_{x=1}^{p-1} |1-e^{\frac{2\pi i c x^{k(p)}}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} \leq e^{\frac{1}{k(p)}} p^{3\sqrt{p}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7

$$\left|\sum_{0 \leq pk+a \leq 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}} 2^{QM(p)},$$

где $M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p+1}{(p-1)\ln 2}$.

Доказательство.

На основании (1.2) и (1.3) имеем

$$\left|\sum_{0 \leq pk+a \leq 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| = S_Q(0) + \frac{1}{p}\sum_{c=1}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{ac}{p}} S_Q\left(\frac{c}{p}\right).$$

Оценим сумму $S_Q\left(\frac{c}{p}\right)$ при любом $c \in [1, p-1]$.

По лемме 1

$$S_Q\left(\frac{c}{p}\right) = \prod_{r=0}^{Q-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}).$$

Имеем

$$S_Q\left(\frac{c}{p}\right) = \prod_{r=0}^{Q-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}) = \prod_{s=0}^{\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]} \prod_{r=0}^{\delta(p)-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}) \prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}) =$$

$$= \left(\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}})\right)^{\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]} \prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}).$$

Используя тот факт, что $\sin x \sin 2x \leq \frac{3}{4}$ при $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. [1]), получаем

$$\left|\prod_{u=\left[\frac{Q-1}{\delta(p)}\right]\delta(p)}^{Q-1} (1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}})\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} 2^{\left\{\frac{Q-1}{\delta(p)}\right\}\delta(p)} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\delta(p)}{2}\left\{\frac{Q-1}{\delta(p)}\right\}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}}.$$

Используя лемму 3 и лемму 6, приходим к оценке

$$\prod_{r=0}^{\delta(p)-1} |1-e^{2\pi i \frac{c2^r}{p}}| = \left(\prod_{x=1}^{p-1} |1-e^{\frac{2\pi i x^{k(p)}}{p}}|\right)^{\frac{1}{k(p)}} \leq e^{\frac{1}{k(p)}} p^{3\sqrt{p}},$$

из которой следует, что

$$\left|\sum_{0\le pk+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pk+a)\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{\delta(p)}{2}} 2^{QM(p)},$$

где $M(p) = \frac{3k(p)\sqrt{p}\ln p+1}{(p-1)\ln 2}$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{k\le X \\ k\equiv a (\mathrm{mod}\, p) \\ k\in N_0}} 1.$$

Для нее справедливо равенство

$$\sum_{\substack{k\le X \\ k\equiv a (\mathrm{mod}\, p) \\ k\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + \frac{1}{2}\sum_{pk+a\le X} \varepsilon(pk+a) + O(1).$$

Таким образом, достаточно оценить сумму

$$S(X,a) = \sum_{pk+a\le X} \varepsilon(pk+a).$$

Определим натуральное число s неравенствами $2^s \le X < 2^{s+1}$. Тогда имеем

$$S(X,a) = \sum_{pk+a\le 2^s-1} \varepsilon(pk+a) + \sum_{2^s\le pk+a\le X} \varepsilon(pk+a).$$

Так как $2^s \le X < 2^{s+1}$, справедливо тождество

$$\sum_{2^s\le pk+a\le X} \varepsilon(pk+a) = -\sum_{0\le pk+l\le X-2^k} \varepsilon(pk+l) = -S(X-2^s,l),$$

где $l \equiv a - 2^s (\mathrm{mod}\, p)$, $l \in [0;p-1]$.

Получено равенство

$$S(X,a) = S(2^s,a) - S(X-2^s,l).$$

Применяя то же рассуждение, что к $S(X,a)$, к сумме $S(X-2^s,l)$ и так далее, приходим к неравенству

$$|S(X,a)| \le |S(2^s,a)| + |S(2^{s_1},a_1)| + \cdots$$

$$s > s_1 > \cdots$$

Применяя к каждой сумме в правой части последнего неравенства лемму 7, получаем

$$|S(X,a)| \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{[\log_2 X]} 2^{([\log_2 X]-i)M(p)} \le \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{\frac{p-1}{2}} c(p) X^{M(p)},$$

где $c(p) = \frac{1}{1-2^{-M(p)}}$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Gelfond A.O. Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnies// Acta Arith.1968.V.XIIIp.259–265.
2. Науменко А.П. Известия СГУ. Серия Математика. Механика. Информатика, в печати.
3. Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел// М.: Мир, 1987.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел// М.: Наука, 1965.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2// М.: Физматлит, 2006.

ON THE DISTRIBUTION OF NATURAL NUMBERS WITH BINARY EXPANSIONS OF A SPECIAL TYPE IN ARITHMETIC PROGRESSIONS WITH PRIME DIFFERENCES

A.P. NAUMENKO

Belgorod State University

e-mail gritsenko@bsu.edu.ru

Let N_0 be a set of natural numbers whose binary expansions contain even number of 1-s. Let p be an odd prime and a be a natural number. The asymptotic formula for the sum

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\,p)\\ n\in N_0}} 1$$

got in our paper. The remainder ferm of this formula in several cases refines the remainder ferm of a well known formula due to A.O. Gelfond.

Key words: natural numbers, asymptotic formula, Abelian transform.

УДК 517.9

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПО ГЁЛДЕРУ ПЛОТНОСТИ

В.А. ПОЛУНИН, А.П. СОЛДАТОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

В теории эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными типа Моисило – Теодореско имеют место обобщённые интегралы типа Коши с однородными ядрами. Изучение граничных таких интегралов является важным условием исследования краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными указанного типа. В данной работе рассматривается трёхмерный аналог интеграла типа Коши. Ядро этого интеграла представляет собой функцию, которая однородна по одной из переменных, а по другим принадлежит классу Гельдера.

Ключевые слова: условие Гельдера, интеграл Коши, однородный, поверхность Ляпунова.

Пусть задана ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и ее границей служит гладкая замкнутая поверхность $\Gamma = \partial D$. Пусть функция $Q(x, y; \xi)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in \overline{D}$, $y \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$, и при фиксированных x, y однородна степени -2 и нечетна:

$$Q(r\xi) = r^{-2}Q(\xi), r > 0, \quad Q(-\xi) = -Q(\xi). \tag{1.1}$$

Рассмотрим интеграл

$$\phi(x) = \int_\Gamma Q(x, y; y - x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \tag{1.2}$$

где ds_y означает элемент площади на Γ. Очевидно, этот интеграл определяет непрерывную в D функцию ϕ. Основная цель данной статьи - показать, что в предположении соответствующей гладкости относительно плотности φ, ядра Q и поверхности Γ функция ϕ непрерывно продолжима на граничную поверхность Γ.

Все рассмотрения будут вестись в рамках классов Гельдера C^ν. Напомним, что для заданной на множестве E функции φ ее норма Гельдера определяется равенством

$$|\varphi|_{\nu,E} = |\varphi|_{0,E} + [\varphi]_{\nu,E},$$

где положено

$$|\varphi|_{0,E} = \sup_{x\in E}|\varphi(x)|, \quad [\varphi]_{\nu,E} = \sup_{x\neq y}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

При $[\varphi]_{1,E} < \infty$ говорят также, что функция φ удовлетворяет условию Липшица. Если множество E является замкнутой областью, то можно ввести класс $C^{1,\nu}(E)$ непрерывно дифференцируемых функций φ условиями $\varphi, \varphi' \in C^\nu(E)$, где штрих означает любую из частных производных.

Условимся отображение α множества $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ на E_2 называть липшицевым, если оно является гомеоморфным и вместе со своим обратным удовлетворяет условию Липшица. Другими словами, существует такая постоянная $M > 0$, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|\alpha(x)-\alpha(y)|}{|x-y|} \leq M \tag{1.3}$$

для любых $x, y \in E_1$, $x \neq y$. Очевидно, липшицевы отображения осуществляют изоморфизм $\varphi \to \varphi \circ \alpha$ пространства $C^\nu(E_2)$ на $C^\nu(E_1)$.

Обозначим $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma; H^0)$ класс всех непрерывных функций $Q(x, y; \xi)$ со свойством однородности (1), которые при фиксированном ξ принадлежат $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma)$, причем

$$|Q|_\nu^{(0)} = \sup_{|\xi|=1} |Q(x, y; \xi)|_{\nu, \overline{D}\times\Gamma} < \infty. \tag{1.4}$$

Пусть дополнительно функция Q принадлежит классу C^m по переменной ξ и ее частные производные

$$\frac{\partial^k Q}{\partial \xi^k}, \quad k = (k_1, k_2, k_3),$$

порядка $|k| = k_1 + k_2 + k_3 \leq m$ принадлежат классу $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma)$ равномерно по $|\xi| = 1$. В результате получим пространство $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma; H^m)$ с соответствующей нормой

$$|Q|_\nu^{(m)} = \sum_{|k|\leq m} \left|\frac{\partial^k Q}{\partial \xi^k}\right|_\nu^{(0)}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем предполагается что Γ является поверхностью Ляпунова и принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Последнее означает следующее: для любого $y_0 \in \Gamma$ существует гомеоморфное отображение $y = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ единичного круга $B = \{t \in \mathbb{R}^2, |t| \leq 1\}$ на некоторую окрестность поверхности Γ в точке y_0, которое принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$ и 3×2 −матрица Якоби $D\gamma$ которого имеет ранг 2 в каждой точке, т.е. касательные векторы

$$c_i(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t_i}, \quad i = 1,2, \tag{1.6}$$

линейно независимы.

Отметим попутно, что элемент площади на Γ дается равенством $ds_y = |[c_1(t), c_2(t)]| dt_1 dt_2$, где $[,]$ означает векторное произведение. Другими словами, интеграл от функции $\varphi \in C(\Gamma)$ по поверхности $\gamma(B) \subseteq \Gamma$ вычисляется по формуле

$$\int_{\gamma(B)} \varphi(x) ds_x = \int_B \varphi[\gamma(t)] |[c_1(t), c_2(t)]| dt. \tag{1.7}$$

Убедимся, что параметризация γ является липшицевым отображением B на $\gamma(B)$. Записывая $\gamma(t) - \gamma(s)$ в виде $f(1) - f(0)$ с функцией $f(\tau) = \gamma[s(1-\tau) + t\tau]$, получим

$$\gamma(t) - \gamma(s) = (t_1 - s_1)q_1(s,t) + (t_2 - s_2)q_2(s,t), \qquad (1.8)$$

где в обозначениях (1.6)

$$q_i(s,t) = \int_0^1 c_i[s(1-\tau) + t\tau]d\tau, \quad i = 1{,}2.$$

Следовательно,

$$\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|}{|t-s|} = |\lambda_1 p_1(\lambda,s) + \lambda_2 p_2(\lambda,s)|,$$

где положено

$$\lambda_i = (t_i - s_i)/|t-s|, \quad p_i(\lambda,s) = q_i(s, s+\lambda|t-s|).$$

Вектор λ меняется на единичной окружности Ω и вектор-функции p_i непрерывны на компакте $\Omega \times B$. Следовательно, непрерывна и функция $|\lambda_1 p_1(\lambda,s) + \lambda_2 p_2(\lambda,s)|$. Поскольку эта функция нигде в нуль не обращается, она ограничена сверху и снизу положительными постоянными, что приводит к оценкам (1.3) для отображения γ.

По определению липшицево преобразование $y = \alpha(\tilde{y})$ пространства $\mathbb{R}^3$ на себя выпрямляет поверхность Γ в точке a, если существует такая плоскость P, проходящая через точку $\tilde{a} = \alpha^{-1}(a)$, что P совпадает с $\tilde{\Gamma} = \alpha^{-1}(\Gamma)$ в некоторой окрестности V этой точки, т. е. $P \cap V = \tilde{\Gamma} \cap V$.

Лемма 1.

(a) *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $a \in \Gamma$. Тогда существует липшицево преобразование α, выпрямляющее Γ в окрестности a, которое вместе со своим обратным непрерывно дифференцируемо, причем матрицы Якоби $D(\alpha^{\pm 1})$ принадлежат классу $C^\nu(\mathbb{R}^3)$.*

(b) *Пусть липшицево преобразование $y = \alpha(x)$ вместе со своим обратным непрерывно дифференцируемо, причем матрицы Якоби $D(\alpha^{\pm 1})$ принадлежат классу $C^\nu(\mathbb{R}^3)$. Тогда справедлива формула замены переменных*

$$\int_\Gamma \varphi(y)ds_y = \int_{\tilde{\Gamma}} \varphi[\alpha(x)]J(x)ds_x, \quad \tilde{\Gamma} = \alpha^{-1}(\Gamma), \qquad (1.9)$$

с некоторой функцией $J(x) \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. Эта функция определяется равенством

$$J(x) = |[(D\alpha)e_1(x), (D\alpha)e_2(x)]|, \qquad (1.10)$$

где векторы e_1, e_2 лежат в касательной плоскости P в точке x к поверхности $\tilde{\Gamma}$, имеют единичную длину и ортогональны друг другу.

(c) *В условиях (b) существует такая постоянная $0 < \delta \le 1$, что вектор-функции $q_i(x,y) \in C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $i = 1{,}2{,}3$, определяемые аналогично (1.8) по α, и равномерно по $|x-y| \le \delta$ выполнена оценка*

$$\left|\sum_1^3 q_i(x,y)\xi_i\right| \ge \frac{|\xi|}{2M}, \qquad (1.11)$$

где M фигурирует в (1.3).

Доказательство.

(a) Пусть $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Gamma$ и гомеоморфное отображение $y = \gamma(t)$ круга $B = \{|t| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ на окрестность точки a поверхности Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$, причем 3×2 – матрица Якоби $D\gamma$ имеет ранг 2 в каждой точке $t \in B$ и $a = \gamma(0)$. Тогда, один из ее миноров, например, $\det\{\partial\gamma_i / \partial t_j\}, 1 \leq i, j \leq 2$, отличен от нуля. Поэтому по теореме об обратной функции существует отображение $t = \delta(y_1, y_2)$ окрестности G точки a на некоторый круг $|t| \leq \varepsilon$, класса $C^{1,\nu}(\overline{G})$, которое является обратным к $y_i = \gamma_i(t), i = 1,2$. Полагая $f = \gamma_3 \circ \delta$, получим вещественную функцию $f \in C^{1,\nu}(\overline{G})$, график которой совпадает с Γ в окрестности точки a.

Пусть гладкая функция χ тождественно равна 1 в окрестности точки (a_1, a_2) и нулю вне некоторого компакта, содержащегося в G. Тогда функция

$$g(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)\chi(y_1, y_2) \in C^{1,\nu}(\mathbb{R}^2)$$

и ее график совпадает с Γ в окрестности точки a. Рассмотрим преобразование $y = \alpha(\tilde{y})$ по формуле

$$y_1 = \tilde{y}_1, y_2 = \tilde{y}_2, y_3 = \tilde{y}_3 + g(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2).$$

Нетрудно видеть, что это преобразование удовлетворяет всем требованиям леммы.

(b) Не ограничивая общности можно считать, что поверхность Γ представлена параметрически уравнением $y = \gamma(t), |t| \leq 1$, класса $C^{1,\nu}$, фигурирующим в (a). Тогда $\tilde{\gamma} = \alpha^{-1} \circ \gamma$ служит параметризацией $\tilde{\Gamma}$ того же типа. Пусть $\tilde{c}_i$ определяются по $\tilde{\gamma}_i$ аналогично (1.6). Тогда по определению (1.7)

$$\int_\Gamma \varphi(x) ds_x = \int_{|t| \leq 1} \varphi[\gamma(t)] |[c_1(t), c_2(t)]| |dt|,$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \varphi[\alpha(y)] J(y) ds_y = \int_{|t| \leq 1} \varphi[\gamma(t)] J[\tilde{\gamma}(t)] |[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]| |dt|.$$

Поэтому коэффициент J в (1.10) определяется равенством

$$J[\tilde{\gamma}(t)] |[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]| = |[c_1(t), c_2(t)]|.$$

В точке $\tilde{y} = \tilde{\gamma}(t)$ векторы (1.6) являются линейными комбинациями $\tilde{c}_i = p_{i,1} e_1 + p_{i,2} e_2$, $i = 1,2$, векторов e_1, e_2 с определителем $\det p \neq 0$. Очевидно,

$$[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2] = [p_{1,1} e_1 + p_{1,2} e_2, p_{2,1} e_1 + p_{2,2} e_2] = (\det p)[e_1, e_2].$$

Поскольку $c_i = \partial\gamma / \partial t_i$ связаны с $\tilde{c}_i$ соотношением $c_i = (D\alpha)\tilde{c}_i$, где матрица Якоби $D\alpha$ вычислена в точке $\tilde{\gamma}(t)$, можем также записать

$$\begin{aligned}[c_1, c_2] = [p_{1,1}(D\alpha)e_1 + p_{1,2}(D\alpha)e_2, p_{2,1}(D\alpha)a_1 + p_{2,2}(D\alpha)a_2] = \\ = (\det p)[(D\alpha)e_1, (D\alpha)e_2].\end{aligned}$$

Так как $|[e_1, e_2]| = 1$, в результате для J получим выражение (1.10).

Остается убедиться, что $J \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. В силу (1.10) достаточно выбрать единичные векторы $e_i(y) \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. Они выбираются по $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ с помощью стандартной процедуры ортогонализации. Положим $b_1 = \tilde{c}_1$, $b_2 = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1, \tilde{c}_1)\tilde{c}_2$. Эти функции ортогональны и принадлежат классу $C^\nu(B)$. Ясно, что этим свойством обладают и единичные векторы $b_i/|b_i|$. С помощью параметризации $\tilde{\gamma}$ они определяют вектор- функции e_i на $\tilde{\Gamma}$, т.е. $e_i \circ \tilde{\gamma} = b_i/|b_i|$. Поскольку параметризация $\tilde{\gamma}$ является липшицевым отображением, функции $e_i \in C^{\nu}(\tilde{\Gamma})$, что завершает доказательство.

(c) При фиксированном ξ можем записать

$$(D\alpha)(x)\xi = \sum_{i=1}^{3} q_i(x,x)\xi_i,$$

где учтено, что $q_i(x,x) = \partial\alpha/\partial x_i(x)$. Полагая $x - y = \xi$, имеем:

$$\alpha(x) - \alpha(y) = (D\alpha)(x)\xi + b(y)|\xi|,$$

где $b(y) \to 0$ при $|\xi| \to 0$. Отсюда но основании (1.3) имеем оценку

$$\frac{|\xi|}{M} \le |(D\alpha)(x)\xi| \le M\,|\xi|.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{i=1}^{3} q_i(x,y)\xi_i\right| \ge |(D\alpha)(x)\xi| - \sum_{i=1}^{3} [q_i]_{\nu}|x-y|^{\nu} \ge \frac{|\xi|}{2M}$$

при $|x - y| \le \delta = 1/MC,\ C = \sum_i [q_i]_{\nu}$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $Q \in C^{\nu}(\overline{D} \times \Gamma, H^2)$ *и* $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma), 0 < \mu < \nu$. *Тогда функция* ϕ, *определяемая интегралом (1.2), непрерывно продолжима на* Γ, *принадлежит классу* $C^{\mu}(\overline{D})$ *и допускает оценку*

$$|\phi|_{\mu,\overline{D}} \le A|Q|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu,\Gamma}, \tag{1.12}$$

где постоянная $A > 0$ *зависит только от* μ, ν *и* Γ.

Доказательство. Докажем сначала, что для каждой точки $a \in \overline{D}$ существует такая ее окрестность V, что оценка (1.12) выполнена по отношению к $V \cap \overline{D}$, т.е.

$$|\phi|_{\mu,D\cap V} \le C_a|Q|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu,\Gamma}, \tag{1.13}$$

где постоянная C_a зависит только от μ, ν, Γ и a.

Случаи $a \in D$ и $a \in \Gamma$ рассмотрим отдельно.

1) Пусть $a \in D$. В качестве V выберем замкнутый шар с центром в точке a, содержащийся в D. Тогда расстояние δ от этого шара до границы $\Gamma = \partial D$ положительно. Будем считать, что R есть диаметр области D. Тогда

$$\delta \le |x - y| \le R \quad \text{при} \quad x \in V, y \in \Gamma. \tag{1.14}$$

Рассмотрим шаровой слой $G = \{\delta \le |\xi| \le R\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если функция $Q(\xi)$ непрерывно дифференцируема по ξ и удовлетворяет условию однородности (1.1), то в обозначениях (1.5) имеем оценку

$$|Q|_{\nu,G} \leq C_1 |Q|_\nu^{(1)},$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от δ и R.

С учетом (1.14) отсюда следует, что функция $Q_0(x,y) = Q(x,y;y-x)$ принадлежит $C^\nu(V \times \Gamma)$ и ее C^ν - норма оценивается через норму $|Q|_\nu^{(1)}$. В результате для функции ϕ на V имеем оценку

$$|\phi|_{\nu,V} \leq C|Q|_\nu^{(1)} |\varphi|_{0,\Gamma},$$

и тем более оценку (1.13).

2) Пусть $a \in \Gamma$. Согласно лемме 1(a) существует липшицево преобразование α, для которого $(D\alpha)^{\pm 1} \in C^\nu(\mathbb{R}^3)$, выпрямляющее Γ в точке a. Другими словами, если $a = \alpha(\tilde{a})$ и $\Gamma = \alpha(\tilde{\Gamma})$, то поверхность $\tilde{\Gamma} \in C^{1,\nu}$ является плоской в окрестности точки $\tilde{a}$.

Положим $x = \alpha(\tilde{x}), y = \alpha(\tilde{y})$, тогда согласно лемме 1(b) интеграл (1.2) при этой подстановке перейдет в

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\tilde{\Gamma}} Q[\alpha(\tilde{x}), \alpha(\tilde{y}); \alpha(\tilde{y}) - \alpha(\tilde{x})] \varphi[\alpha(\tilde{y})] J(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}}, \quad \tilde{x} \in \widetilde{D}. \qquad (1.15)$$

В силу двустороннего неравенства (1.3), которому удовлетворяет липшицево преобразование α справедливы оценки

$$|\phi|_{\nu,E} \leq C|\widetilde{\phi}|_{\nu,\tilde{E}}, \quad |\widetilde{\phi}|_{\nu,\tilde{E}} \leq C|\phi|_{\nu,E},$$

где $E \subseteq \overline{D}, E = \alpha(\tilde{E})$ и постоянная C зависит только от M. Поэтому (1.13) достаточно установить по отношению к функциям $\widetilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi[\alpha(\tilde{x})]$ и $J(\tilde{y})\varphi[\alpha(\tilde{y})]$ по отношению к, соответственно, $\widetilde{D} \cap \tilde{V}$, $V = \alpha(\tilde{V})$ и $\tilde{\Gamma}$. Таким образом, опуская волну в обозначениях (1.15), оценку (1.13) достаточно установить для интеграла

$$\phi(x) = \int_\Gamma Q[\alpha(x), \alpha(y), \alpha(y) - \alpha(x)] \varphi(y) J(y) ds_y, \qquad (1.16)$$

где поверхность $\Gamma \in C^{1,\nu}$ является плоской в окрестности точки a. Последнее означает, что для некоторого $r_1 > 0$ и плоскости P пересечение $P \cap \{|y-a| \leq r_1\}$ совпадает с $\Gamma \cap \{|y-a| \leq r_1\}$. Зафиксируем $0 < r_0 < r_1$ и в качестве V выберем шар $|y-a| \leq r_0$, так что $V \cap D$ является полушаром, лежащим с одной стороны от P.

Число r_1 выберем столь малым, что по отношению к α выполнено утверждение леммы 1(c) с $\delta = 2r_1$.

Пусть $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ отвечают в (1.16) интегралам по, соответственно, $|y-a| \leq r_1$ и $|y-a| \geq r_1$. Расстояние между множествами $\{|x-a| \leq r_0\}$ и $\Gamma \cap \{|y-a| \geq r_1\}$ равно $r_1 - r_0$, так что с учетом (1.3)

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| \geq \frac{r_1 - r_0}{M}.$$

Поэтому оценка (1.13) для функции $\phi_1(x)$ устанавливается совершенно так же, как в случае 1).

Таким образом, эту оценку требуется установить для функции

$$\Phi_0(x) = \int_{\Gamma_0} Q[\alpha(x), \alpha(y); \alpha(y) - \alpha(x)]\varphi_0(y)ds_y, \quad x \in D_0, \qquad (1.17)$$

$\Gamma_0 = \Gamma \cap \{|y - a| \le r_1\}$, $D_0 = V \cap D$ и $\varphi_0(y) = J(y)\varphi(y)$.Напомним, что $\Gamma_1 \subseteq P$ и D_0 является полушаром шара $V = \{|x - a| \le r_0\}$, лежащим с одной стороны от P.

В обозначениях леммы 1(c) можем записать

$$\alpha(y) - \alpha(x) = (y_1 - x_1)q_1(x, y) + (y_2 - x_2)q_2(x, y) + (y_3 - x_3)q_3(x, y),$$

где вектор -функции $q_i(x, y) \in C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ и при $|x - y| \le 2r_1$ удовлетворяют оценке (1.11). Положим

$$Q_0(x, y; \xi) = Q[\alpha(x), \alpha(y); \textstyle\sum_{i=1}^3 q_i(x, y)\xi_i]. \qquad (1.18)$$

Утверждается, что $Q_0 \in C^\nu(\overline{D}_0 \times \Gamma_0; H^{(2)})$ и выполняется соответствующая оценка

$$|Q_0|_\nu^{(2)} \le C|Q|_\nu^{(2)}. \qquad (1.19)$$

В самом деле, в силу (1.13) вектор-функция $Q_0(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по ξ и, очевидно, удовлетворяет условию (1.1).

При этом частные производные $\partial Q_0/\, \partial\xi_j$ являются линейными комбинациями частных производных $\partial Q/\, \partial\xi_j$ с коэффициентами, принадлежащими $C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Аналогичным образом определяются частные производные Q_0 второго порядка. Поэтому, при $|\xi| = 1$ функции $\partial^k Q_0/\, \partial\xi^k, |k| \le 2$ принадлежат $C^\nu(\overline{D}_0 \times \Gamma_1)$ равномерно по $|\xi| = 1$. Здесь учтено, что при $|\xi| = 1$ в силу (1.1) вектор $\eta = \sum_1^3 q_i\xi_i$ принадлежит шаровому слою $\delta_0 \le |\eta| \le \delta_0^{-1}$ с некоторым малым δ_0 и в этом слое функция $Q[\alpha(x), \alpha(y); \eta]$ удовлетворяет по η условию Липшица. В результате в соответствии с определениями (1.4), (1.5) приходим к оценке (1.19).

В обозначениях (1.18) интеграл (1.16) можем переписать в форме

$$\phi_0(x) = \int_{\Gamma_0} Q_0(x, y; y - x)\varphi_0(y)ds_y, \quad x \in D_0. \qquad (1.20)$$

Требуется доказать, что

$$|\phi_0|_{C^\mu, D_0} \le C|Q_0|_\nu^{(2)}|\varphi_0|_{\mu,\Gamma_0}. \qquad (1.21)$$

Тогда с учетом (1.19) и очевидной оценки

$$|\varphi_0|_{\mu,\Gamma_0} \le C|\varphi|_{\mu,\Gamma_0},$$

для функции $\varphi_0 = J\varphi$, вытекающей из леммы 1(b), отсюда будет следовать оценка (1.13) для функции ϕ_0.

Если $Q_0(x, y; \xi)$ не зависит от x, то оценка (1.21) установлена в работе [1]. В общем случае воспользуемся следующим свойством нормы Гельдера [2]: если функция $f(x) \in C^\nu(E)$ и $0 < \mu < \nu$, то функция двух переменных

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\mu},$$

доопределенная нулем при $x = y$, принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(E \times E)$ с оценкой

$$|F|_{\nu-\mu} \le \hat{C}|f|_\nu. \quad (1.22)$$

норм гельдера, где $\hat{C}$ некоторая постоянная.

Применим этот факт к интегралу (1.20). Запишем

$$\phi_0(x') - \phi_0(x'') = \int_{\Gamma_0} [Q_0(x', y; y - x'] - Q_0(x'', y; y - x')]\varphi(y)ds_y +$$

$$+ \int_{\Gamma_0} [Q_0(x'', y; y - x') - Q_0(x'', y; y - x'')]\varphi(y)ds_y = \Delta_2 + \Delta_1.$$

Слагаемое Δ_1 соответствует случаю, когда $Q_0(x, y; \xi)$ не зависит от x, так что имеем оценку

$$|\Delta_1| \le C|Q_0|_\nu^{(2)}|\varphi|_\mu|x' - x''|^\mu. \quad (1.23)$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\frac{\phi_0(x') - \phi_0(x'')}{|x' - x''|^\mu} = \int_{\Gamma_0} \tilde{Q}(x', x'', y; y - x')\phi(y)ds_y \quad (1.24)$$

с ядром

$$\tilde{Q}_0(x', x'', y; \xi) = \frac{Q_0(x', y; \xi) - Q_0(x'', y; \xi)}{|x' - x''|^\mu}.$$

На основании оценки (1.22) и определений (1.4), (1.5) функция $\tilde{Q}_0$ принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(\overline{D}_0 \times \overline{D}_0 \times \Gamma, H^{(2)})$ с соответствующей оценкой

$$|\tilde{Q}_0|_{\nu-\mu}^{(2)} \le C|Q_0|_\nu^{(2)}. \quad (1.25)$$

Рассматривая x', x'' в (1.24) как параметр, снова оказываемся в случае когда ядро Q_0 в (1.20) не зависит от x (с заменой ν на, соответственно $\nu - \mu$ и $0 < \varepsilon < \nu - \mu$.) В частности имеем оценку

$$\frac{|\Delta_2|}{|x' - x''|^\mu} \le |\tilde{Q}_0|_{\nu-\mu}^{(2)}|\varphi|_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \nu - \mu.$$

Совместно с (1.25) отсюда

$$|\Delta_2| \le |Q_0|_\nu^{(2)}|\varphi|_\mu|x' - x''|^\mu.$$

Объединяя ее с (1.23), приходим к справедливости оценки (1.13) для функции ϕ_0

Тем самым оценка (1.13) для исходного интеграла (1.1) в случае $a \in \Gamma$ установлена.

Итак, для каждой точки $a \in \overline{D}$ найдется такая ее открытая окрестность $V = V(a)$, что выполнена оценка (1.13). В силу компактности $\overline{D}$ из открытого покрытия $\{V(a), a \in \overline{D}\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $V_i = V_i(a)$ $1 \le i \le n$.

В силу компактности найдется такое $r > 0$, что при $x, y \in D$ и $|x - y| \leq r$ пара точек x, y принадлежит одному из V_i. Поэтому для этих x, y в силу (1.13) имеем оценку

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|Q|_\nu^{(2)}|\varphi|_\mu|x - y|^\mu.$$

С другой стороны, при $|x - y| \geq r$ имеем очевидную оценку

$$\frac{\phi_0(x)-\phi_0(y)}{|x-y|^\mu} \leq \frac{2|\phi|_0}{r^\mu}.$$

Поскольку каждая точка $x \in D$ принадлежит некоторому V_i, в силу (1.17)

$$|\phi|_{0,\overline{D}} \leq C|Q|_\nu^{(2)}|\varphi|_\mu.$$

Совместно с предыдущими двумя оценками отсюда следует, что $\phi \in C^\mu(D)$ и выполнена оценка (1.12).

Остается заметить, что если $\phi \in C^\mu(E)$ на некотором множестве E, то ϕ непрерывно продолжается на его замыкание $\overline{E}$ с сохранением C^μ - нормы. Применительно к функции $\phi(x), x \in D$, это означает, что ϕ непрерывно продолжима на границу Γ области D и выполнена оценка (1.12).

Список литературы

1. Полунин В.А. Граничные свойства трехмерного аналога интеграла типа Коши // В.А. Полунин. - Материалы международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" и VI Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". - Нальчик-Эльбрус, 2008. - 247с.
2. Солдатов А.П. Элементы функционального анализа и теории функций: Учеб. пособие // А.П. Солдатов. - Белгород: Изд-во БелГУ, 2005. - 140с.

THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF CAUCHY-TYPE INTEGRAL WITH HOLDER-CONTINUOUS DENSITY

V.A. POLUNIN, A.P SOLDATOV

Belgorod State University

e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

The three-dimensional analogue of generalized Cauchy type integral $\phi(x) = \int_\Gamma Q(x, y; y - x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D$, is considered. Here Γ is a Lyapunov boundary of the domain $D \subseteq \mathbb{R}^3$ and the kernel $Q(x, y; \xi)$ is odd and homogeneous of degree two with respect to the variable $\xi \in \mathbb{R}^3$. These integrals occur in elliptic boundary problems (especially for elliptic systems of first order). It is shown that under some smoothness assumptions the function $\phi(x), x \in D$, is Holder continuous up to the boundary $\Gamma = \partial D$.

Key words: Holder condition, Cauchy integral, homogeneous, Lyapunov surface.

УДК 517.927

ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОДНОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ

В. Л. ПРЯДИЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Pryadiev@bsu.edu.ru

Для волнового уравнения на одномерной пространственной сети доказывается аналог правила параллелограмма. На основании этого аналога для случая рационально соизмеримых длин ветвей строится точная численная схема решения начально-краевой задачи. Краевые условия при этом - 1-го и/или 2-го рода.

Ключевые слова: волновое уравнение на одномерной пространственной сети, правило параллелограмма, начально-краевая задача, численная схема.

Введение

Правило параллелограмма (см., например, [1]) для волнового уравнения

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

гласит, что если A, B, C, D - последовательные вершины прямоугольника со сторонами на характеристиках уравнения (1.1), то

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \tag{1.2}$$

Причём верно и обратное: если дважды дифференцируемая функция u такова, что для любой четвёрки последовательных вершин A, B, C, D прямоугольника со сторонами на характеристиках уравнения (1.1) выполнено (1.2), то u есть решение волнового уравнения (1.1). Свойство (1.2) можно положить (см., например, [1]) в основу точной[1] численной схемы решения начально-краевой задачи для уравнения (1.1).

В настоящей работе доказывается аналог свойства (1.2) для случая, когда x в (1.1) пробегает не $\mathbb{R}$, а одномерную пространственную сеть[2].

2. Одномерная пространственная сеть

Пусть $\mathcal{N}$ – одномерная пространственная сеть, причём конечная и ограниченная. Не уменьшая общности можно считать, что $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$, где γ_i – непрерывные кривые без внутренних самопересечений, причём $i \neq j \Rightarrow \gamma_i \cap \gamma_j = \partial\gamma_i \cap \partial\gamma_j$; здесь $\partial\gamma_k$ обозначает множество концов γ_k. Кривые γ_i будем называть ветвями $\mathcal{N}$. Говоря, что γ_i – кривая, мы имеем ввиду, что $\gamma_i := \{\pi_i(\xi) \mid \ell_i ? m_i\}$, где ℓ_i,

[1]Точной в том смысле, что равенство (2) для решения уравнения (1) -- *точное*, а не *приближённое*.

[2]Этот аналог был получен автором совместно с Шаталовым С. С. -- см. [2].

m_i – некоторые вещественные числа, $\ell_i < m_i$, $\pi_i\colon [\ell_i; m_i] \to \mathbb{R}^n$, π_i – непрерывна. Отсутствие внутренних самопересечений у γ_i означает, что

$$[(\ell_i \le \xi_1 < \xi_2 \le m_i) \wedge (\xi_2 - \xi_1 < m_i - \ell_i)] \Rightarrow [\pi_i(\xi_1) \neq \pi_i(\xi_2)].$$

Точки из $\{\pi_i(\ell_i), \pi_i(m_i)\}$, и только их, мы называем концами γ_i. Параметризации π_i ветвей $\mathcal{N}$ далее фиксируются.

Всюду далее предполагается связность $\mathcal{N}$.

Элементы из $V := \bigcup_{i=1}^{m} \partial\gamma_i$ будем называть узлами сети. Во множестве узлов $\mathcal{N}$ выделим подмножество D так, чтобы $\mathcal{N}\setminus D$ оставалось связным. Узлы из D будем называть закреплёнными, а узлы из $V\setminus D$ – свободными[1].

3. Дифференцирование функций, заданных на одномерной пространственной сети

Пусть теперь функция y определена на $\mathcal{N}$ или на $\mathcal{N}\setminus V$, и пусть $x \in \mathcal{N}\setminus V$. Производную $(y(8,8)(3,3)3\pi_i)'(\pi_i^{-1}(x))$, где i определяется включением $x \in \gamma_i$, будем обозначать через $y'(x)$ и будем называть производной функции y в точке x. Если $u = u(x,t)$, где x пробегает $\mathcal{N}$ или $\mathcal{N}\setminus V$, t пробегает промежуток вещественной оси, то через u_x (или $u_x(x,t)$) будем обозначать производную функции u по первому аргументу, т. е. производную функции $u(\,\cdot\,,t)$. Производную по второму аргументу будем обозначать аналогично: u_t или $u_t(x,t)$.

Пусть теперь γ_i^1 и γ_i^2 – половинки γ_i, т. е. $\gamma_i^1 := \{\pi_i(\xi) \mid \ell_i \le \xi \le (\ell_i + m_i)/2\}$, $\gamma_i^2 := \{\pi_i(\xi) \mid (\ell_i + m_i)/2 \le \xi \le m_i\}$. Ясно, что каждая половинка ветви содержит ровно один узел $\mathcal{N}$. Для каждого узла $x \in V$ через $\mathcal{E}(x)$ обозначим множество всех половинок ветвей, содержащих x. Пусть теперь $x \in V$, $h \in \mathcal{E}(x)$, а функция y определена в точках множества h. Если $x_1 \in h \in \mathcal{E}(x)$, то производную функции y в точке x_1 вдоль h в направлении от x будем обозначать через $y'_h(x_1)$, т. е.

$$y'_h(x_1) := \begin{cases} (y(8,8)(3,3)3\pi_i)'(\pi_i^{-1}(x_1)), \text{если} h = \gamma_i^1 \\ -(y(8,8)(3,3)3\pi_i)'(\pi_i^{-1}(x_1)), \text{если} h = \gamma_i^2 \end{cases}.$$

Аналогично будет пониматься символ $u'_h(x_1,t)$ для $u\colon H \times I \to \mathbb{R}$, где $H \supseteq h$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Наконец, $y''_{hh} := (y'_h)_h$ и $u''_{hh}(\,\cdot\,,t) := (u'_h)_h(\,\cdot\,,t)$.

4. Волновое уравнение на одномерной пространственной сети

Далее мы будем рассматривать волновое уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \mathcal{N}\setminus V,\ t \in \operatorname{int} I) \tag{4.1}$$

при условиях трансмиссии

$$\sum_{h\in\mathcal{E}(x)} u'_h(x,t) = 0 \quad (x \in V\setminus D,\ t \in I), \tag{4.2}$$

где I – некоторый промежуток вещественной оси. Систему (4.1)–(4.2) будем называть волновым уравнением на сети $\mathcal{N}$.

---

[1] Эти термины продиктованы тем, что в точках из D мы будем задавать далее условия Дирихле -- для функций, определённых на $\mathcal{N}$.

Замечание. Чтобы оправдать этот термин, заметим: если $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^1$, то условие (4.2), в предположении, что классическое решение системы (4.1)–(4.2) существует, влечёт выполнение уравнения $u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)$ при $x\in V$.

5. Правило параллелограмма в случае одномерной пространственной сети

Пусть $x_0\in\mathcal{N}\backslash D$ и $t_0\in\operatorname{int}I$. Договоримся далее: если $x_0\in\mathcal{N}\backslash V$ и $x_0\in\gamma_i$, то $\gamma_i^1(x_0):=\{\pi_i(\xi)\mid\ell_i<\xi<\pi_i^{-1}(x_0)\}$, $\gamma_i^2(x_0):=\{\pi_i(\xi)\mid\pi_i^{-1}(x_0)<\xi<m_i\}$; множество $\{\gamma_i^1(x_0),\gamma_i^2(x_0)\}$ будем обозначать при этом через $\mathcal{E}(x_0)$. Положим:

$$\operatorname{dist}(x_0,V\backslash\{x_0\}):=$$
$$:=\begin{cases}\min\{m_j-\ell_j\mid\gamma_j\ni x_0\},\text{если}x_0\in V\\ \min\{m_i-\pi_i^{-1}(x_0);\pi_i^{-1}(x_0)-\ell_i\},\text{если}x_0\in\mathcal{N}\backslash V\text{и}x_0\in\gamma_i\end{cases}$$

(в этом определении мы допускаем и случай $x_0\in D$). Скажем, что $\Delta>0$ допустимо в точке (x_0,t_0), если $\Delta\leq\operatorname{dist}(x_0,V\backslash\{x_0\})$ и $(t_0\pm\Delta)\in I$. Для Δ, допустимого в точке (x_0,t_0), определим точки $B_h(x_0,t_0,\Delta)$, $h\in\mathcal{E}(x_0)$, следующим образом: если $x_0\in V\backslash D$, то

$$B_h(x_0,t_0,\Delta):=\begin{cases}(\pi_i(\ell_i+\Delta),t_0),\text{если}h=\gamma_i^1\\(\pi_i(m_i-\Delta),t_0),\text{если}h=\gamma_i^2\end{cases},$$

а если $x_0\in\mathcal{N}\backslash V$, то

$$B_h(x_0,t_0,\Delta):=\begin{cases}(\pi_i(\pi_i^{-1}(x_0)-\Delta),t_0),\text{если}h=\gamma_i^1(x_0)\\(\pi_i(\pi_i^{-1}(x_0)+\Delta),t_0),\text{если}h=\gamma_i^2(x_0)\end{cases}.$$

Лемма. *Пусть $x_0\in\mathcal{N}\backslash D$, $t_0\in int\,I$, а число Δ допустимо для точки (x_0,t_0). Тогда любое решение волнового уравнения (4.1)–(4.2) удовлетворяет равенству:*

$$\frac{1}{2}[u(x_0,t_0-\Delta)+u(x_0,t_0+\Delta)]=\frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|}\sum_{h\in\mathcal{E}(x_0)}u(B_h(x_0,t_0,\Delta)).\qquad(5.1)$$

Верно и обратное: если функция $u:\mathcal{N}\times I\to\mathbb{R}$ удовлетворяет функциональному уравнению (5.1), причём для любой $t_0\in int\,I$ определены $u_{tt}(\cdot,t_0)$ (на $\mathcal{N}$) и $u_{xx}(\cdot,t_0)$ (на $\mathcal{N}\backslash V$), и $u_{tt}(\cdot,t_0)$ непрерывна на $\mathcal{N}$, то u есть решение уравнения (4.1)–(4.2).

Замечание. Точки $B_h(x_0,t_0,\Delta)$, $h\in\mathcal{E}(x_0)$, есть точки пересечения характеристик волнового уравнения (4.1), проходящих через $(x_0,t_0-\Delta)$ и $(x_0,t_0+\Delta)$. Поэтому равенство (5.1) и есть аналог правила параллелограмма для волнового уравнения (1.1).

Доказательство леммы начнём с первой её части. При этом достаточно ограничиться случаем $x_0\in V\backslash D$. Пусть $\Delta_{\max}$ – максимум чисел Δ, допустимых в точке (x_0,t_0). Функция

$$v(\xi,\tau):=\frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|}\sum_{h\in\mathcal{E}(x_0)}u(B_h(x_0,\tau,\xi))$$

является решением волнового уравнения на треугольнике

$$\{(\xi,\tau) \mid 0 < \xi < \Delta_{\max}, |\tau - t_0| < \Delta_{\max} - \xi\},$$

удовлетворяя при этом краевому условию второго рода: $v_\xi(0,\tau) = 0$. Поэтому, в силу правила параллелограмма для уравнения (1.1),

$$2v(\widetilde{\Delta}, t_0) = v(0, t_0 - \widetilde{\Delta}) + v(0, t_0 + \widetilde{\Delta}),$$

для всех $\widetilde{\Delta} \in (0;\Delta)$, где Δ – по-прежнему, некоторое допустимое в точке (x_0, t_0) число. Отсюда, предельным переходом при $\widetilde{\Delta} \to \Delta -$, и получаем (5.1).

Докажем вторую часть леммы. Поскольку случай $x_0 \in \mathcal{N} \setminus V$ совпадает с классическим (и влечёт сразу же (4.1)), то достаточно рассмотреть только случай, когда $x_0 \in V \setminus D$. Вычитая $u(x_0, t_0)$ из обеих частей равенства (5.1), получим:

$$\frac{1}{2}[u(x_0, t_0 - \Delta) - u(x_0, t_0) + u(x_0, t_0 + \Delta) - u(x_0, t_0)] =$$
$$= \frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|} \sum_{h \in \mathcal{E}(x_0)} [u(B_h(x_0, t_0, \Delta)) - u(x_0, t_0)].$$

Поделив это равенство на Δ и устремив Δ к 0, получим (4.2).

Лемма доказана.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $(m_i - \ell_i)/(m_j - \ell_j) \in \mathbb{Q}$ *для любых* i *и* j. *Пусть* $\Delta > 0$ *таково, что* $(m_i - \ell_i) \in \Delta\mathbb{N}$ *для любого* i. *Пусть* M *– равномерная сетка с шагом* Δ *на* $\mathcal{N} \times I$, *содержащая точки с абсциссами из* V, *т. е.*

$$M := (\mathcal{N} \times I) \cap (X_\Delta \times (t_1 + \Delta\mathbb{Z})),$$

где $X_\Delta := \{x \in \mathcal{N} \mid dist(x, V \setminus \{x\}) \in \Delta\mathbb{N}\}$, *а* t_1 *– некоторая точка из* I. *Обозначим:*

$$\partial M := \{(x,t) \in M \mid x \in D \ \vee \ (t + \Delta) \not\in I \ \vee \ (t - \Delta) \not\in I\}.$$

Пусть u *– решение уравнения (4.1)–(4.2). Тогда для любой точки* (x_0, t_0) *из* $M \setminus \partial M$ *выполнено (5.1).*

Следствие. *Пусть в условиях теоремы* $I = [0; +\infty)$, $t_1 = 0$ *и*

$$u(x,t) = 0 \quad (x \in D,\ t\text{□}).$$

Тогда для любой $(x_0, t_0) \in M \setminus \partial M$ *выполнено (5.1), причём для любой* $x \in X_\Delta \setminus D$ *выполнено*

$$u(x, \Delta) = \frac{1}{|\mathcal{E}(x)|} \sum_{h \in \mathcal{E}(x)} \left[u(B_h(x, 0, \Delta)) + \int_0^\Delta u_t(B_h(x, 0+, s))\, ds\right]. \quad (5.2)$$

Доказательство.

В силу теоремы достаточно обосновать лишь (5.2). Но (5.2) следует из аналога формулы Даламбера для (4.1)–(4.2), доказанного, например, в [3][1].

---

[1]Для $D \neq \emptyset$ этот аналог доказан в [4] (см. также [5] -- перевод [4] на английский язык).

Таким образом, если $u(\cdot\ ,0)$, $u_t(\cdot\ ,0)$ и $u(x,\cdot\ )$ $(x \in D)$ заданы, то спомощью (5.2) мы можем найти $u(x,\Delta)$ при $x \in X_\Delta$, а затем, с помощью (5.1), шаг за шагом найти $u(x,2\Delta)$, $u(x,3\Delta)$, … – при $x \in X_\Delta$.

Замечание. В полученном следствии можно считать охваченным случай, когда в некоторых точках из D заданы краевые условия не первого рода, а второго:

$$u'_h(x,t) = 0 \quad (x \in D_1,\ h \in \mathcal{E}(x),\ t\square),$$

где D_1 – некоторое подмножество D, такое, что $x \in D_1 \Rightarrow |\mathcal{E}(x)| = 1$. Действительно, достаточно точки из D_1 объявить свободными узлами пространственной сети $\mathcal{N}$, и мы окажемся в условиях следствия.

Список литературы:

1. John F. Partial differential equations. - N.-Y., Heidelberg, Berlin: Springer Verlag. - 1982. - 251 p.
2. Прядиев В. Л., Шаталов С. С. Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений// Современные методы теории функций и смеж-ные проблемы: Матер. конф. - Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. - С. 206-207.
3. Прядиев В. Л., Фадеева Л. Г. Представление решения волнового уравнения на неограниченном геометрическом графе без граничных вершин// Совершенствование преподавания физико-математических и общетехнических дисциплин в педвузе и школе : Сб. науч. тр. - Вып. 4. - Борисоглебск: Борисоглебский гос. пед. ин-т, 2007. - С. 39-53.
4. Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравне-ния на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Современная математика и её приложения. Т. 38. Тр. междун. конф. по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль, 5-10 июля 2004 г. Часть 3. - Тбилиси: Ин-т Академии наук Грузии, 2006. - С. 82-94.
5. Pryadiev V. L. Description of solutions to the initial-boundary-value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation// J. of Math. Sci. - 2007. - V. 147, № 1. - P. 6470-6482.

PARALLELOGRAM RULE FOR WAVE EQUATION ON ONE-DIMENSIONAL SPATIAL NETWORK

V.L. PRYADIEV

Belgorod State University

e-mail: pryadiev@bsu.edu.ru

For the wave equation on one-dimensional spatial network an analogue of the parallelogram rule is proved. On the basis of this analogue for a case of rationally commensurable lengths of branches the exact numerical circuit of the decision of a initial-boundary problem is constructed. Boundary conditions thus is 1-st and/or 2-nd kinds.

Key words: wave equation on one-dimensional spatial network, parallelogram rule, initial-boundary problem, numerical circuit

УДК 517.994

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ ЭЙЛЕРА И НАВЬЕ-СТОКСА

В.И.СЕМЕНОВ

Кузбасский региональный институт повышения квалификации и переподготовки работников образования

e-mail: visemenov@rambler.ru

Доказаны важные интегральные тождества для соленоидальных векторных полей. Они дают новые априорные оценки к тем оценкам, что доказала О. А. Ладыженская. В частности, мы имеем априорную оценку, которая не зависит от коэффициента вязкости, и существование глобальных решений для уравнений Эйлера. Почему нет явления турбулентности в плоском случае? Это объясняется одним из тождеств. Другие тождества представляют интерес для вывода новых законов сохранения.

Ключевые слова: интегральные тождества, обобщенное решение, априорные оценки, тензор напряженности, уравнения Навье –Стокса и Эйлера.

Введение

В первой части работы изучаются свойства соленоидальных векторных полей. Интегральные тождества для таких полей играют важную роль в выводе законов сохранения и свойств решений начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса и Эйлера. Иллюстрация некоторых приложений интегральных тождеств в динамике жидкости дается в пункте 1 и описывается теоремами 1.1-1.3, 1.4. Важная роль отводится следствию 1.1 с помощью которого обосновывается лучшая сходимость приближенных решений уравнений Навье-Стокса.

Вторая часть работы (пункты 3,4) посвящена начально-краевой задаче для уравнений Навье-Стокса и Эйлера на плоскости:

$$D_t u_k + \sum_{i=1}^{2} u_i u_{k,i} = \nu \Delta u_k + f_k - p_{,k},\ k = 1,2, \qquad (1.1)$$

$$divu = 0, \qquad (1.2)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1.3)$$

где Ω - односвязная область с кусочно-гладкой границей, u - скорость потока, p - функция давления, $f = (f_1, f_2)$ - внешняя сила и $divf = 0$. Символы $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{k,i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ ($u_{k,ij} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}$ и т.д.) означают частное или обобщенное дифференцирование, Δ - оператор Лапласа, ν - неотрицательная постоянная (коэффициент вязкости жидкости). Относительно векторного поля φ предполагаем, что оно принадлежит соболевскому классу $W_2^3(\Omega)$, если не оговорено иное. (Определение и свойства этих пространств см. в [13,14].)

Другие стандартные обозначения, которые применяются в работе: матрица Якоби отображения u относительно пространственных переменных обозначается символом ∇u . Ее модуль есть $|\nabla u| = (\sum_{i,j} u_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$. Употребляемые нормы:

$$||v||_p = (\int_\Omega |v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, ||u||_{p,q} = (\int_0^t (\int_\Omega |u(t,x)|^p dx)^{\frac{q}{p}} dt)^{\frac{1}{q}},$$

где $t \leq T$. Иногда вместо области Ω в нормах подразумеваем пространство R^2.

Начально-краевая задача на плоскости для уравнений Навье-Стокса изучена О.А. Ладыженской в [1] (см. подробности в [2, глава VI]). Новые интегральные тождества и модификация конструкции О.А. Ладыженской и А.А. Киселева из [3], которую автор применил в пространственной задаче Коши в [4], дают возможность получить новые априорные оценки норм градиентов скоростей в размерности $n = 2$ (см. теорему 3.1). Важность этих оценок заключается в том, что они не зависят от коэффициента вязкости. Из результатов в [2] такие оценки не выводятся. Следствием новых оценок является доказательство существования в целом обобщенного решения для уравнений Эйлера (уравнений Навье-Стокса с нулевым коэффициентом вязкости) на плоскости (теорема 4.1). Этот факт также из результатов в [2] не следует. Найденное решение уравнений Эйлера принадлежит классу $L_{4,4}$ - классу, в котором имеет место теорема единственности решений уравнений Навье-Стокса (см. [23, 24]).

Всюду в работе повторяющийся индекс в произведении означает суммирование этих произведений в границах изменения индекса или индексов. Например, $u_i u_{j,i} = \sum_{i=1}^n u_i u_{j,i}$, $u_{i,j} u_{j,i} = \sum_{i,j=1}^n u_{i,j} u_{j,i}$, $u_i u_{j,i} \Delta u_j = \sum_{i,j=1}^n u_i u_{j,i} \Delta u_j$, и т. д.

Скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначаем стандартно: (f, g).

1. Основные интегральные тождества

Пусть $u, v, w\colon R^n \to R^n$ - произвольная тройка финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^n)$. Полагаем

$$c_{ki}(u) = u_{k,i} - u_{k,i}, \quad k, i = 1,2, \dots, n. \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Для каждой тройки $u, v, w\colon R^n \to R^n$ финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^n)$ справедливо интегральное тождество:*

$$\int (w_{i,j} + w_{j,i}) c_{ki}(v) c_{kj}(u) dx = -\int w_i (c_{ki}(u) \Delta v_k + c_{ki}(v) \Delta u_k) dx.$$

Доказательство. Интеграл из левой части равенства леммы обозначим символом I, а из правой части - символом J. Преобразуем I, применяя формулу интегрирования по частям. Тогда из (1.4) после изменения индексов суммирования имеем

$$I = -J - \int (w_i c_{ki,j}(v) c_{kj}(u) + w_i c_{ki,j}(u) c_{kj}(v)) dx. \tag{1.5}$$

Используя равенство $c_{ki,j} = c_{kj,i} - c_{ij,k}$, вновь преобразуем (1.5) по формуле интегрирования по частям. Тогда

$$I = -J - \int w_i (c_{ij,k}(v) c_{kj}(u) + c_{ij,k}(u) c_{kj}(\mathrm{v})) dx. \tag{1.6}$$

В (1.6) еще раз выполним интегрирование по частям. Затем в произведениях $w_{i,k} c_{ij} c_{kj}$ индекс суммирования k заменяем индексом j и наоборот. В результате (1.4) и условия соленоидальности имеем

$$I = -J - \int (w_{i,j} c_{ik}(v) c_{jk}(u) + w_{i,j} c_{ik}(u) c_{jk}(v) - w_i c_{ij}(v) \Delta u_j - w_i c_{ij}(u) \Delta v_j) dx.$$

Условие кососимметричности $c_{ij} = -c_{ji}$ используем во всех слагаемых последнего равенства. Отсюда выводим равенство: $I = -J$. Лемма доказана.

Следствие 1.1. *В размерности $n = 2$ для каждой тройки u, v, w финитных соленоидальных векторных полей класса $C_0^2(R^2)$ справедливо интегральное тождество:*

$$\int (w_i c_{ki}(u) \Delta v_k + w_i c_{ki}(v) \Delta u_k) dx = 0.$$

Доказательство. В размерности $n = 2$, в силу условия кососимметричности $c_{ij} = -c_{ji}$, для сумм произведений выполняются равенства: $c_{k1}(u) c_{k2}(v) = 0$, $c_{k1}(u) c_{k1}(v) = c_{k2}(u) c_{k2}(v)$ (повторяющийся индекс означает суммирование). Поэтому условие $divw = 0$ и лемма 1.1 дают утверждение следствия.

Следствие 1.2. *В произвольной размерности n любое финитное соленоидальное векторное поле u класса $C_0^{2r+2}(R^n)$ удовлетворяет интегральному тождеству:*

$$\int (u_{i,j} + u_{j,i}) c_{ki}(\Delta^r u) c_{kj}(u) dx = -\int u_i (c_{ki}(u) \Delta_k^{r+1} u_k + c_{ki}(\Delta^r u) \Delta u_k) dx.$$

Доказательство. В качестве тройки полей u, v, w в лемме 1.1 следует взять $u, \Delta^r u, u$. Следствие доказано.

Другая часть интегральных тождеств связана с интегралом импульса (см.[5]). Для достаточно широкого класса соленоидальных полей импульс (интеграл теоремы 1.1) оказывается нулевым. Его обращение в нуль есть следствие условия квазиконформности поля скоростей. Требование квазиконформности деформации (не отображения!) здесь естественное, так как в условиях несжимаемости потока оно означает ограниченность компонент тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$.

Интегральные представления векторных полей через тензор напряжений в ограниченной области впервые указаны в [6]. Отсюда в силу теорем вложения С.Л. Соболева [13] следует непрерывность векторных полей с ограниченными компонентами тензора напряжений.

Лемма 1.2. (См.[4, лемма 1.3.]) *Если непрерывное отображение $w: R^n \to R^n$ принадлежит классу $W_p^1(R^n)$, $p > 1$, то для любых точки x и показателя α, $\alpha > (n-1)(1 - 1/p)$, $r^{-\alpha} \int_{|x-y|=r} w(y) dS \to 0$, если $r \to \infty$.*

Отметим некоторые свойства соленоидальных квазиконформных деформаций.

Лемма 1.3. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n, n \geq 2$, принадлежит классу $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j. Тогда имеет место интегральное представление:*

$$u_i(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \frac{(u_{i,j}(y) + u_{j,i}(y))(x_j - y_j)}{|x-y|^n} dy, \ i = 1,2,\dots,n,$$

где ω_{n-1} - площадь единичной сферы.

Доказательство. Для проверки равенства леммы следует применить теорему Стокса в шаровом слое $\varepsilon \leq |y-x| \leq r$ для интеграла из правой части равенства леммы. К интегралу, содержащему выражение $u_{j,i}$, теорему Стокса применяем дважды и учитываем условие $div\ u = 0$. Предельный переход, когда $\varepsilon \to 0, r \to \infty$, с применением леммы 1.3 дает требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n, n > 2$, *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ *и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j. *Тогда векторное поле* u *ограничено.*

Доказательство. Интеграл в интегральном представлении леммы 1.3 разбиваем на два интеграла: по шару $|y-x| < 1$ и его внешности $|y-x| \geq 1$. Интеграл по шару оцениваем, учитывая ограниченность компонент тензора напряжений. Тогда $|\int_{|y-x|<1} (\cdot)dy| \leq M \int_{|y-x|<1} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = M\omega_{n-1}$. Здесь ω_{n-1} - площадь $n-1$ - мерной единичной сферы. Интеграл по внешности шара оцениваем, применяя неравенство Гельдера. В результате имеем $|\int_{|y-x|\geq 1} (\cdot)dy| \leq 2||\nabla u||_2 (\int_{|y-x|\geq 1} \frac{dy}{|x-y|^{2(n-1)}})^{1/2} \leq C$. Из этих оценок следует ограниченность векторного поля u. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n$ *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$ *и имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j. *Если* $r \int_{|x|=r} |u(x)|dS \to 0$, *когда* $r \to \infty$ *или* $|u(x)| = o(|x|^{-n})$, *когда* $|x| \to \infty$, *то*

$$\int u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Векторное поле u порождает однопараметрическую группу $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений пространства (см. [7, § 6, теорема 6]). Тогда имеем соотношения:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = u \circ \Phi_t,\ e^{-mt}|x-y| \leq |\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| \leq e^{mt}|x-y| \quad (1.7)$$

с некоторой константой m. Из группового свойства $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ имеем равенство:

$$u \circ \Phi_t = (\Phi_t)_{k,i}(x) u_i(x), \quad (1.8)$$

выполняющееся почти всюду. В силу теоремы Лиувилля якобиан $J(x, \Phi_t) = 1$ почти всюду. тогда по формуле замены переменной в силу (1.8) выводим равенства:

$$\int u(z)dz = \int u \circ \Phi_t(x)dx = \int (\Phi_t)_{k,i}(x) u_i(x)dx.$$

По теореме Стокса, из условия $divu = 0$, имеем равенство:

$$\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_{k,i}(x) u_i(x)dx = \int_{|x|=r} (\Phi_t)_k(x) u_i(x) \frac{x_i}{r} dS.$$

Так как $\int_{|x|=r} (\Phi_t)_k(0)u_i(x)\frac{x_i}{r}dS = 0$, то из второго соотношения в (1.7) получаем оценки:

$$|\int_{|x|=r} (\Phi_t)_k(x)u_i(x)\frac{x_i}{r}dS| \leq \int_{|x|=r} |(\Phi_t)_k(x) - (\Phi_t)_k(0)||u(x)|dS \leq re^{mt}\int_{|x|=r} |u(x)|dS.$$

Тогда из этой оценки, условия теоремы и предыдущих двух равенств выводим утверждение теоремы.

Можно освободиться от ограничений роста на векторное поле в бесконечно удаленной точке.

Теорема 1.2. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n$ *принадлежит классу* $W_2^1(R^n) \cap L_1(R^n)$, *имеет ограниченные компоненты тензора напряжений* $u_{i,j} + u_{j,i}$ *для всех* i, j *и ограничено в размерности* $n = 2$. *Тогда*

$$\int u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Считаем векторное поле u гладким, иначе рассматриваем усреднения. Компоненты тензора напряжений усреднений ограничены теми константами, которыми ограничены компоненты тензора напряжений векторного поля u. Возьмем произвольную гладкую финитную функцию η, которая равна единице, если $|x| \leq 1$, и обращается в нуль , если $|x| \geq 2$. Векторное поле $v(x) = \eta(x/r)u(x), r > 1$, финитное. Так как векторное поле u ограничено, либо по условию, либо по лемме 1.4, то компоненты тензора напряжений $v_{i,j} + v_{j,i}$ ограничены универсальной константой при всех $r > 1$. Тогда векторное поле порождает однопараметрическую группу $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений пространства (см. [7, § 6, теорема 6]). В силу равенства вида (1.8) и финитности v имеем соотношения:

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int (\Phi_t)_{k,i}(x)v_i(x)dx = -\int (\Phi_t)_k(x)div\ v(x)dx = 0. \quad (1.9)$$

Так как $div\ v = r^{-1}(\nabla\eta(\cdot/r), u)$, то в силу ограниченности u с некоторой константой M, независящей от r, имеем неравенство $|div\ v| \leq M/r$. Тогда из групповых свойств $\{\Phi_t\}$ для якобианов выводим неравенства:

$$e^{-M|t|/r} \leq J(x, \Phi_t) \leq e^{M|t|/r}. \quad (1.10)$$

В интеграле из левой части (1.9) делаем замену переменной $x = \Phi_{-t}(z)$. В результате имеем

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int \eta(z/r)u(z)J(z, \Phi_{-t})dz. \quad (1.11)$$

В силу выбора функции η имеем равенство:

$$\int v \circ \Phi_t(x)dx = \int_{|z|\leq r} u(z)J(z, \Phi_{-t})dz + \int_{r\leq|z|\leq 2r} \eta(z/r)u(z)J(z, \Phi_{-t})dz.$$

По теореме Лебега в силу оценок (1.10) первый интеграл из правой части стремится к значению $\int_{R^n} u(z)dz$, когда $r \to \infty$. Второй интеграл правой части в силу суммируемости u и (1.10) стремится к нулю. Поэтому из (1.9) и (1.11) имеем требуемое равенство леммы. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 1.1 можно распространить на ограниченные области.

Теорема 1.3. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: \Omega \to R^n$ для ограниченной выпуклой области Ω принадлежит классу $W_2^1(\Omega)$, имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j. Если на границе области для вектора нормали n скалярное произведение $(n, u(x)) = 0$, то*

$$\int_\Omega u(x)dx = 0.$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству предыдущей теоремы. Обращение скалярного произведения $(n, u(x))$ в нуль на границе области обеспечивает существование однопараметрической группы $\{\Phi_t\}$ квазиизометрических отображений области Ω на себя.(Существование полугрупп $\{\Phi_t^1\}_{t\geq 0}$, $\{\Phi_t^2\}_{t\geq 0}$ с инфинитезимальными образующими u и $-u$ следует из [8, § 3, теорема 3]. Взаимная обратность отображений Φ_t^1, Φ_t^2 доказывается также, как и теорема 2.2 из [9, § 2]. Теорема доказана.

Лемма 1.5. *Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n$ принадлежит классу $W_2^1(R^n)$, имеет ограниченные компоненты тензора напряжений $u_{i,j} + u_{j,i}$ для всех i, j; $u(x) = o(1/|x|^{n+1})$, когда $x \to \infty$, и интеграл $\int |x||u(x)|dx$ - конечен. Тогда*

$$\int x_j u_k(x)dx = -\int x_k u_j(x)dx$$

для любой пары чисел j, k.

Доказательство. Применяем идею доказательства теоремы 1.1. Пусть $\{\Phi_t\}$-однопараметрическая группа квазиизометрических отображений пространства, порожденная векторным полем u. По формуле замены переменной имеем равенство (якобиан отображений Φ_t равен единице):

$$\int x_j u_k(x)dx = \int (\Phi_t)_j(x) u_k \circ \Phi_t(x)dx.$$

В силу (1.8) имеем:

$$\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x) u_k \circ \Phi_t(x)dx = \int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_{k,i}(x) u_i(x)dx.$$

В правой части применяем теорему Стокса. Тогда

$$\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_{k,i}(x) u_i(x)dx =$$

$$-\int_{|x|\leq r} (\Phi_t)_{j,i}(x)(\Phi_t)_k(x) u_i(x)dx + \int_{|x|=r} (\Phi_t)_j(x)(\Phi_t)_k(x) u_i(x)\frac{x_i}{r}dS.$$

В объемном интеграле правой части воспользуемся (1.8). В поверхностном интеграле учитываем, что $\Phi_t)(x) = O(|x|)$, когда $x \to \infty$ (см. второе соотношение (1.7)). Тогда предельное значение поверхностного интеграла при условии, что $r \to$

∞, равно нулю. Поэтому в результате предельного перехода и замены переменной из предыдущих равенств имеем:

$$\int x_j u_k(x)dx = -\int (\Phi_t)_k(x)u_i \circ \Phi_t(x)dx = -\int x_k u_i(x)dx.$$

Лемма доказана.

Остановимся сейчас на неожиданных законах сохранения в задаче Коши для уравнений Навье-Стокса, которые найдены в [10] для пространства и в [11] в общем случае. Они получены в предположении, что решения и все их первые производные убывают в бесконечно удаленной точке быстрее, чем $1/|x|^{n+1}$. На самом деле условия на рост можно ослабить до показателя $n/2$, что является существенным для приложений (см. [5]). Это, во-первых. Во-вторых, здесь важен фактор соленоидальности поля, а не фактор решения.

Пусть соленоидальное векторное поле $u: R^n \to R^n, n \geq 3$, таково, что

$$|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\gamma},\ |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\gamma+1}},\ |u_{,ij}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\gamma+2}},\ i,j = 1,\dots,n, \tag{1.12}$$

где C - некоторая постоянная, показатель $\gamma > n/2$. Рассмотрим новое векторное поле

$$v = u_i u_{,i} = w + \nabla P, \tag{1.13}$$

которое разложено на соленоидальную и потенциальную составляющие. Здесь

$$P(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{R^n} \frac{u_{i,j}(y)u_{j,i}(y)dy}{|x-y|^{n-2}},$$

$$w(x) = u_i(x)u_{,i}(x) - \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{R^n} \frac{u_{i,j}(y)u_{j,i}(y)(x-y)dy}{|x-y|^n}, \tag{1.14}$$

где ω_{n-1} - площадь единичной сферы. Интегрирование по частям приводит к формулам:

$$P(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{R^n} \frac{u_{i,j}(y)u_j(y)(x_i-y_i)dy}{|x-y|^n}, \tag{1.15}$$

$$P_{,k}(x) = \frac{1}{n}u_j(x)u_{k,j}(x) - T_{ik}(u_{i,j}u_j)(x), \tag{1.16}$$

где T_{ik} -подходящий сингулярный интегральный оператор. Оценки (1.12), формула (1.15) и неравенство Харди-Литтлвуда-Соболева (см. [12, с.141]) обеспечивают суммируемость функции P в любой конечной степени $p > 1$. Оценки (1.12), формула (1.16) и ограниченность сингулярного интегрального оператора дают суммируемость ∇P в любой конечной степени $p > 1$. Требуя интегрируемость этих отображений в степени $p = 1$, можно усилить результаты из [10] и [11].

Теорема 1.4. *Пусть соленоидальное векторное поле* $u: R^n \to R^n, n \geq 3$, *удовлетворяет оценкам (1.12), функция* P *из (1.14) суммируема,* $P(x) = o(1/|x|^n)$, *когда* $x \to \infty$, *и интеграл* $\int |x||\nabla P(x)|dx$ *- конечен. Тогда. Тогда имеют место равенства:*

$$\int u_j u_k dx = \frac{\delta_{jk}}{n} ||u||_2^2,\ j,k = 1,\dots,n,$$

где δ_{jk} - символ Кронекера.

Доказательство. Отметим, что имеет место равенство:

$$\int u_j(x) u_k(x) dx = -\int x_k u_i(x) u_{j,i}(x) dx, \tag{1.17}$$

которое следует из оценок (1.12) и формулы интегрирования по частям. Применяем разложение (1.13) и заметим, что векторное поле w удовлетворяет условиям леммы 1.5. Ограниченность его первых производных следует из оценок (1.12), равенства

$$w_{,m}(x) = (u_i u_{,i})_{,m}(x) - \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{R^n} \frac{(u_{i,j} u_{j,i})_{,m}(y)(x-y) dy}{|x-y|^n},$$

в котором интеграл ограничен. Ограниченность интеграла показывается его разбиением на два интеграла по шару $|x-y| < 1$ и его внешности с последующими оценками при помощи (1.12). Поэтому в силу леммы 1.8 имеем равенства:

$$\int x_k w_j(x) dx = -\int x_j w_k(x) dx,\ j,k = 1,\dots,n. \tag{1.18}$$

Из теоремы Стокса выводим:

$$\int_{|x|\leq r} x_k P_{,j}(x) dx = -\int_{|x|\leq r} \delta_{jk} P(x) dx + \int_{|x|=r} P(x) \frac{x_j x_k}{r} dS.$$

Тогда предельный переход дает равенство:

$$\int x_k P_{,j}(x) dx = -\int \delta_{jk} P(x) dx. \tag{1.19}$$

Таким образом из (1.17),(1.13) и (1.19) выводим:

$$\int u_j(x) u_k(x) dx = -\int x_k w_j(x) dx - \int \delta_{jk} P(x) dx,\ j,k = 1,\dots,n.$$

Сделаем перестановку индексов j,k в этих равенствах и выполним сложение пар таких равенств с фиксированными индексами j,k. Применим (1.18) и получим

$$2\int u_j(x) u_k(x) dx = -2\int \delta_{jk} P(x) dx,\ j,k = 1,\dots,n.$$

Следовательно, $||u||_2^2 = -n\int P(x) dx$. Тогда предыдущие равенства дают утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1.1. В размерности $n = 2$, используя фактор решения, в [20] дается простое и красивое доказательство этого факта.

2. Оценки приближений начально-краевой задачи в ограниченной области на плоскости для уравнений Навье-Стокса

Опишем изменение конструкции, предложенной в [3] и развитой в [2], применительно к плоской ограниченной односвязной области Ω (односвязность важна на завершающем этапе доказательства существования слабого решения). Рассмотрим финитные соленоидальные векторные поля $\varphi: \Omega \to R^2$ класса C^∞. Замыкание этого класса по норме соболевского пространства $W_2^3(\Omega)$ обозначаем символом $J_0^3(\Omega)$. Пространство $J_0^3(\Omega)$ сепарабельное, как подпространство соболевских пространств $W_p^l(\Omega), 1 < p < \infty$. Поэтому существует счетная совокупность $(\psi^n)_{n=1,\dots}$ бесконечно дифференцируемых векторных полей, подчиняющихся условиям:

1) $div\ \psi^n = 0$;

2) замыкание линейной оболочки совокупности по норме $W_2^3(\Omega)$ совпадает с пространством $J_0^3(\Omega)$.

Применим ортогонализацию Сонина-Шмидта по фундаментальной системе $(\psi^n)_{n=1,\dots}$ и построим счетную систему элементов $(b^n)_{n=1,\dots}$, которая обладала бы свойством ортогональности лапласианов в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. скалярное произведение

$$(\Delta b^n, \Delta b^m) = \int_\Omega \Delta b_i^n \Delta b_i^m dx = \delta_{ij}, \tag{2.1}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Тогда каждое отображение b^n есть конечная линейная комбинация отображений (ψ^k). Пусть

$$\Delta b^n = a^n. \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, считаем первым элементом векторное поле $a^1 = \frac{\Delta\varphi}{\text{P}\Delta\varphi||_2}$, где соленоидальное векторное поле $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ определяет начальное условие в задаче (1.1)-(1.3). (К фундаментальной системе всегда можно присоединить первым элементом любой элемент.)

Замечание 2.1. На самом деле можно не требовать условия $\varphi \in C^\infty$. Все рассуждения, предшествующие замечанию 2.1, и рассуждения в доказательствах лемм 2.1-2.3 остаются в силе, если ограничиться требованием $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$.

Последовательные приближения v^n определяем, слегка изменив конструкцию

О.А.Ладыженской [2 с.197]. Полагаем

$$\Delta v^n(t,x) = \sum_{q=1}^n c_{qn}(t) a^q(x). \tag{2.3}$$

Тогда приближенное решение v^n строится, как гидродинамический потенциал

$$v^n(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^n c_{qn}(t) \int_\Omega a^q(y) \ln|x-y| dy. \tag{2.4}$$

Функции c_{qn} есть решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(D_t v^n, a^q) - \nu(\Delta v^n, a^q) + \int_\Omega v_i^n v_{k,i}^n a_k^q dx = (f, a^q),\ q = 1,2 \dots, n, \tag{2.5}$$

с начальными условиями: $c_{qn}(0) = ||\Delta\varphi||_2 \delta_{qn}$, где δ_{qn} - символ Кронекера. Тогда

$$\Delta v^n(0,x) = \Delta\varphi(x),\ v^n(0,x) = \varphi(x). \tag{2.6}$$

Выясним промежуток существования гладкого решения системы (2.5). Каждое уравнение из (2.5) умножаем на функции c_{qn} , а затем их суммируем. В результате имеем:

$$(D_t v^n, \Delta v^n) - \nu||\Delta v^n||_2^2 + \int_\Omega v_i^n v_{k,i}^n \Delta v_k^n dx = (f, \Delta v^n).$$

Так как $\int_\Omega v_i^n v_{k,i}^n \Delta v_k^n dx = \int_\Omega v_i^n c_{ki}(v^n) \Delta v_k^n dx$, то из следствия 1.1 и формулы интегрирования по частям выводим соотношение:

$$(D_t \nabla v^n, \nabla v^n) + \nu||\Delta v^n||_2^2 = (\nabla f, \nabla v^n). \quad (2.7)$$

Отсюда имеем очевидную оценку: $\frac{d}{dt}||\nabla v^n||_2^2 \leq 2||\nabla f||_2||\nabla v^n||_2$ или $\frac{d}{dt}||\nabla v^n||_2 \leq ||\nabla f||_2$ Интегрируя по отрезку $[0,t]$, выводим неравенство:

$$||\nabla v^n||_2 \leq ||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt. \quad (2.8)$$

Существование гладких решений системы (2.5) на некотором промежутке $[0, t_0)$ гарантируется теоремами существования и гладкости решений для обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя оценка показывает, что эти решения продолжаются на каждый отрезок $[0,T]$, где смешанная норма $||\nabla f||_{2,1}$- конечная.

Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть плоская область Ω произвольная и смешанная норма $P\nabla fP_{2,1}$ на прямом произведении $[0,T] \times \Omega$ конечная. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ для приближений v^n, построенных по формулам (2.3)-(2.5), справедливы оценки:*

1) $||\nabla v^n||_2 \leq ||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt$;
2) $||\Delta v^n||_{2,2}^2 \leq \nu^{-1}||\nabla \varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla \varphi||_2^2)$;
3) $||\nabla v^n||_{4,4} \leq C/\sqrt[4]{\nu}$,

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0,t] \times \Omega$, и константа C зависит только от $T,\ f,\ \varphi$.

Доказательство. Справедливость первой оценки установлена выше. Докажем вторую оценку. Интегрируем (2.7) по отрезку $[0,t]$ и оцениваем правую часть неравенством Коши-Буняковского. Используя первую оценку, выводим:

$$\frac{1}{2}||\nabla v^n||_2^2 + \nu||\Delta v^n||_{2,2}^2 \leq ||\nabla \varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla \varphi||_2^2).$$

Отсюда имеем оценку 2). Оценка 3) есть оценка леммы 1 из [2, с.19], потому что в этом случае имеем неравенства $||\nabla v_i^n||_4^4 \leq 4||\nabla v_i^n||_2^2 \sum_j ||v_{,ij}^n||_2^2$, $i = 1,2$. Так как $\sum_{i,j} ||v_{,ij}^n||_2^2 = ||\Delta v^n||_2^2$, то из оценок 1) и 2) следует оценка 3). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть плоская область Ω ограничена. Предположим, что норма* $||\nabla f(0,\cdot)||_2$ и смешанные нормы $||\nabla f||_{2,1}$, $||\nabla D_t f||_{2,1}$ на прямом произведении $[0,t] \times \Omega$ для каждого $t \leq T$ конечные. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ для приближений v^n, построенных по формулам (2.3)-(2.5), справедливы оценки:

1) $||v^n||_2 \leq C(\Omega)(||\nabla \varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt)$;

$$2)\ ||\nabla D_t v^n||_2 \le (||\nabla f(0,\cdot)||_2 + ||\nabla T^1||_2 + \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt) e^{\sqrt{t}||\nabla v^n||^2_{4,4}},$$

где постоянная $C(\Omega)$ зависит только от области, $T^1(x) = \nu\Delta\varphi(x) - \varphi_i\varphi_{k,i}(x)$, и смешанная норма вычислена на множестве $[0,t] \times \Omega$.

Доказательство. В ограниченной области для финитных векторных полей выполняется неравенство:

$$||v^n||_2 \le C(\Omega)||\nabla v^n||_2, \tag{2.8'}$$

где постоянная $C(\Omega)$ оценивается сверху через первое собственное число оператора Лапласа (см. [13, с.135]). Тогда оценка 1) следует из первого неравенства леммы 2.1.

Докажем вторую оценку. В равенствах (2.5) заменим интеграл $\int_\Omega v_i^n v_{k,i}^n a_k^q dx$ интегралом $\int_\Omega v_i^n c_{ki}(v^n) a_k^q dx$, поскольку они равны. Затем равенства дифференцируем по аргументу t. После этого каждое из них умножим соответственно на $c'_{qn}(t)$ и сложим. В результате имеем:

$$(D_{tt}v^n, D_t\Delta v^n) - \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 + \int_\Omega (D_t v_i^n c_{ki}(v) + v_i^n c_{ki}(D_t v))\Delta D_t v_k^n dx = (D_t f, \Delta D_t v^n).$$

Отсюда, в силу следствия 1.1 выводим равенство:

$$(D_{tt}v^n, D_t\Delta v^n) - \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 + \int_\Omega D_t v_i^n c_{ki}(v)\Delta D_t v_k^n dx = (D_t f, \Delta D_t v^n).$$

Выполним интегрирование по частям и запишем это равенство в следующем виде:

$$(D_{tt}\nabla v^n, D_t\nabla v^n) + \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 = \int_\Omega D_t v_i^n c_{ki}(v)\Delta D_t v_k^n dx + (\nabla D_t f, \nabla D_t v^n).$$

Правую часть оценим, используя неравенства Гельдера и Коши -Буняковского. Тогда, учитывая формулу (1.4), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2^2 + \nu||\Delta D_t v^n||_2^2 \le 2||D_t v^n||_4||\nabla v^n||_4||\Delta D_t v^n||_2 + ||\nabla D_t f||_2||\nabla D_t v^n||_2.$$

Рассматривая это неравенство, как квадратное неравенство относительно нормы $||\Delta D_t v^n||_2$, заключаем, что его дискриминант должен быть неотрицательным. Поэтому имеем оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2^2 \le \frac{1}{\nu}||D_t v^n||_4^2||\nabla v^n||_4^2 + ||\nabla D_t f||_2||\nabla D_t v^n||_2. \tag{2.9}$$

Так как (см. лемму 2 из [2, с.19] и [13, с.135]) $||D_t v^n||_4^2 \le 2||D_t v^n||_2||\nabla D_t v^n||_2 \le 2C(\Omega)||\nabla D_t v^n||_2^2$, то из (2.9) имеем

$$\frac{d}{dt}||D_t\nabla v^n||_2 \le \frac{2C(\Omega)}{\nu}||\nabla D_t v^n||_2||\nabla v^n||_4^2 + ||\nabla D_t f||_2.$$

Обозначим $z(t) = ||D_t\nabla v^n||_2$, $c(t) = 2C(\Omega)\nu^{-1}\int_0^t ||\nabla v^n||_4^2 dt$. Тогда последнее неравенство равносильно соотношению:

$$\frac{d}{dt}(z(t)e^{-c(t)}) \le ||\nabla D_t f||_2 \cdot e^{-c(t)}.$$

Заменим экспоненту в правой части единицей и проинтегрируем по отрезку $[0,t]$. Тогда

$$z(t)e^{-c(t)} - z(0) \le \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt. \qquad (2.10)$$

Оценим значение $z(0)$. В равенствах (2.5) считаем $t=0$. Умножим их на $c_{qn}^{'}(0)$ и сложим. В результате из (2.6) имеем

$$(D_t v^n(0,\cdot), \Delta D_t v^n(0,\cdot)) - (T^1, \Delta D_t v^n(0,\cdot)) = (f(0,\cdot), \Delta D_t v^n(0,\cdot)).$$

Выполним интегрирование по частям. Тогда получим

$$||D_t v^n(0,\cdot)||_2^2 = (\nabla T^1, \nabla D_t v^n(0,\cdot)) + (\nabla f(0,\cdot), \nabla D_t v^n(0,\cdot)).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского выводим оценку: $z(0) = ||D_t v^n(0,\cdot)||_2 \le ||\nabla T^1||_2 + ||\nabla f(0,\cdot)||_2$. Из неравенства (2.10) и определения функции $c = c(t)$ имеем вторую оценку леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть плоская область Ω ограничена. Предположим, что норма* $||\nabla f(0,\cdot)||_2$ и смешанные нормы $||\nabla f||_{2,1}$, $||\nabla D_t f||_{2,1}$ на прямом произведении $[0,t]\times\Omega$ конечные для каждого числа $t \le T$. Тогда последовательность приближений $(v^n)_{n=1,2,\dots}$, построенная по формулам (2.3)-(2.5), при положительном коэффициенте ν ограничена в пространстве $W_4^1([0,T]\times\Omega)$.

Доказательство. Ограниченность норм $||v^n||_{4,4}$,$||D_t v^n||_{4,4}$, $||\nabla v^n||_{4,4}$ на множестве $[0,T]\times\Omega$ следует из лемм 2.1, 2.3, мультипликативного неравенства леммы 1 из [2, с.19] и неравенств вида $(2.8^{'})$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Можно отказаться от требования, чтобы область Ω была звездной относительно некоторого круга. На самом деле здесь важным является факт применимости теоремы вложения С.Л. Соболева в цилиндре $[0,T]\times\Omega$. Справедливость теорем вложения С.Л. Соболева на более широкий класс областей установлена в [14, с.81].

Пусть приближение v^n из формул (2.3)-(2.5). Рассмотрим гидродинамический потенциал

$$P^n(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega v_{i,j}^n(t,y)v_{j,i}^n(t,y)\ln|x-y|dy. \qquad (2.11)$$

Произведение $v_{i,j}^n v_{j,i}^n \in L_p([0,T]\times\Omega)$ при каждом показателе p, $1 \le p \le 2$, в ограниченной области Ω. Тогда из равенства

$$P_{,k}^n(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{v_{i,j}^n(t,y)v_{j,i}^n(t,y)(x_k-y_k)dy}{|x-y|^2} \qquad (2.11')$$

и неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева [12, с.141] для потенциалов Рисса имеем оценку:

$$||\nabla P^n||_q \le A||\nabla v^n||_{2p},$$

где $A = A(p)$ - универсальная константа, а показатели p, q таковы, что $p > 1$ и $1/q = 1/p - 1/2$. Выбираем показатель $p = 4/3$. Тогда из предыдущего неравенства и неравенства логарифмической выпуклости норм в пространствах L_p имеем соответственно оценку:

$$||\nabla P^n||_4 \le A||\nabla v^n||_2^{1/2}||\nabla v^n||_4^{1/2}.$$

Тогда в условиях леммы 2.1 из оценки 1) выводим неравенство для смешанных норм:

$$||\nabla P^n||_{4,4} \le AC(T, \varphi, f)||\nabla v^n||_{4,4}. \qquad (2.12)$$

Отсюда следует такое утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть плоская область Ω ограничена, и смешанная норма $P\nabla f P_{2,1}$ на прямом произведении $[0, t] \times \Omega$ конечная для каждого числа $t \le T$. Тогда последовательность приближений $(P^n)_{n=1,2,\dots}$, построенная по формуле (2.11), имеет следующие свойства:*

1) удовлетворяет неравенству (2.12) при положительном коэффициенте вязкости ν;

2) ограничена в пространстве $L_2([0, T] \times \Omega)$ при неотрицательном коэффициенте вязкости ν;

3) существует константа $C = C(q)$, $1 < q < 2$, такая, что $||\nabla P^n||_q \le C(q)||\nabla v^n||_2^2$ для неотрицательного коэффициента вязкости ν.

Доказательство. Неравенство (2.12) доказано выше. Последовательность $(P^n)_{n=1,2,\dots}$ относительно t равномерно ограничена в $L_2(\Omega)$. Действительно, для произвольной непрерывной финитной функции ξ из (2.11) имеем неравенство:

$$|\int_\Omega P^n(t, x)\xi(x)dx| \le \frac{1}{2\pi}\int_\Omega |\nabla v^n(t, y)|^2 \int_\Omega |\xi(x)\ln|x - y||dxdy.$$

Применим неравенство Гельдера к внутреннему интегралу в правой части. В следствие ограниченности области Ω, с некоторой константой C имеем неравенство:

$$|\int_\Omega P^n(t, x)\xi(x)dx| \le C\int_\Omega |\nabla v^n(t, y)|^2 dy||\xi||_2.$$

Из оценки 1) леммы 2.1, произвольного выбора функции ξ и теоремы Рисса выводим неравенство: $||P^n||_2 \le C_1$, где константа C_1 не зависит от n. Оценка 3) доказывается аналогично с применением равенства $(2.11')$. Лемма доказана.

3. Свойства решений начально-краевой задачи в ограниченной области для уравнений Навье-Стокса

Считаем сейчас, что коэффициент вязкости $\nu > 0$, и ограниченная область Ω есть звездная область относительно некоторого круга. Тогда цилиндр $[0, T] \times \Omega$ есть звездная область в пространстве. В силу теоремы вложения С.Л. Соболева и леммы 2.3 последовательность приближений $(v^n)_{n=1,2,\dots}$ с условиями из лемм 2.1 и 2.2

компактно вкладывается в пространство $C([0,T]\times\overline{\Omega})$. Пусть $(v^{n_m})_{m=1,2,\dots}$ - подпоследовательность, которая равномерно сходится, и

$$v(t,x) = \lim_{m\to\infty} v^{n_m}(t,x). \tag{3.1}$$

Не ограничивая общности, считаем, что подпоследовательность $(v^{n_m})_{m=1,2,\dots}$ сходится слабо к векторному полю v в пространстве $W_4^1([0,T]\times\Omega)$, а подпоследовательность градиентов $(\nabla P^{n_m})_{m=1,2,\dots}$, где функция P^n определена формулой (2.11), сходится слабо в $L_{4,4}([0,T]\times\Omega)$ к векторному полю ∇P. В силу оценки 2) леммы 2.1 можно также считать, что вторые производные $v_{,ij}^{n_m}$ сходятся слабо к $v_{,ij}$ в пространстве $L_2([0,T]\times\Omega)$. (Для вторых производных отображений v^n с подходящим сингулярным интегральным оператором T_{ij} выполняется равенство: $v_{,ij}^n = \alpha_{ij}\Delta v^n + T_{ij}(\Delta v^n)$.) Таким образом, имеем место

Лемма 3.1. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то векторное поле $v \in W_4^1([0,T]\times\Omega)$, имеет вторые обобщенные производные $v_{,ij}$ и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v||_2 \le ||\nabla\varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt$;
2) $||\Delta v||_{2,2}^2 \le \nu^{-1}||\nabla\varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla\varphi||_2^2)$;
3) $||\nabla v||_{4,4} \le C/\sqrt[4]{\nu}$;
4) $||v||_2 \le C(\Omega)(||\nabla\varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt)$;
5) $||\nabla D_t v||_2 \le (||\nabla f(0,\cdot)||_2 + ||\nabla T^1||_2 + \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt)\exp(C^2\sqrt{t/\nu})$;

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0,t]\times\Omega$, константа C зависит только от T, f, φ, постоянная $C(\Omega)$ зависит только от области, $T^1(x) = \nu\Delta\varphi(x) - \varphi_i(x)\varphi_{k,i}(x)$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.3, оценок лемм 2.1 , 2.2 и полунепрерывности норм слабых пределов.

Лемма 3.2. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то почти всюду выполняются равенства:*

$$(D_t v, a^q) - \nu(\Delta v, a^q) + \int_\Omega v_i v_{k,i} a_k^q dx = (f, a^q),\ q = 1,2 \dots,$$

где векторные поля a^q из (2.2).

Доказательство. Равенства (2.5) умножим на произвольную гладкую финитную функцию $\eta \in C_0^\infty([0,T])$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Фиксируем натуральное число q. Для всех элементов подпоследовательности $(v^{n_m})_{m=1,2,\dots}$, ранее выбранной, с номерами $n_m \ge q$ имеем равенства:

$$\int_0^T \eta(t)(D_t v^{n_m}, a^q)dt - \nu\int_0^T \eta(t)(\Delta v^{n_m}, a^q)dt + \int_0^T \int_\Omega \eta(t) v_i^{n_m} v_{k,i}^{n_m} a_k^q dxdt$$

$$= \int_0^T \eta(t)(f, a^q)dt,\ q \leq n_m. \qquad (3.2)$$

Равномерная сходимость последовательности $(v^{n_m})_{m=1,2,\dots}$ и ее слабая сходимость в пространстве $W_4^1([0,T] \times \Omega)$ обеспечивают слабую сходимость последовательности $(v_i^{n_m} v_{,i}^{n_m})_{m=1,\dots}$ в пространстве $L_2([0,T] \times \Omega)$. Ее слабый предел равен $v_i v_{,i}$, где v из (3.1). Поэтому предельный переход в (3.2) дает равенства:

$$\int_0^T \eta(t)(D_t v, a^q)dt - \nu \int_0^T \eta(t)(\Delta v, a^q)dt + \int_0^T \int_\Omega \eta(t) v_i v_{k,i} a_k^q dxdt = \int_0^T \eta(t)(f, a^q)dt$$

при каждом фиксированном значении q. Так как функция η выбиралась произвольным образом, то отсюда следует справедливость равенств леммы. Лемма доказана.

В силу замечания 2.1 в зависимости от выбора фундаментальной системы (ψ^k) имеет место

Следствие 3.1. *Пусть область Ω ограниченная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то для каждого соленоидального векторного поля $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ (или $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$) почти всюду на отрезке $[0,T]$ выполняется равенство:*

$$(D_t v, \Delta\psi) - \nu(\Delta v, \Delta\psi) + \int_\Omega v_i v_{k,i} \Delta\psi_k dx = (f, \Delta\psi).$$

Доказательство. Для элементов фундаментальной системы (ψ^k) равенство следует из леммы 3.2 и формулы (2.2). Для произвольного поля ψ из условия следствия требуемое равенство вытекает из определения фундаментальной системы. Следствие доказано.

Пусть

$$H = D_t v - \nu\Delta v + v_i v_{,i} - f + \nabla P, \qquad (3.3)$$

где P есть слабый предел подпоследовательности функций из (2.11), существующий в силу леммы 2.4. Тогда векторное поле H - соленоидальное, как слабый предел соленоидальных полей. Покажем, что при определенных ограничениях на область Ω векторное поле H будет градиентом гармонической функции. Разложение пространств L_2 в прямую сумму градиентных и соленоидальных полей указано в [15] (см. также [16, с. 333]). Однако, приемлемое для нас разложение имеется в [2, с. 41-44] (см. также [17, с. 51]). Опираясь на это разложение, докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Если v - слабый предел из (3.1), то для соленоидального векторного поля H из (3.3) почти всюду на отрезке $[0,T]$ выполняется равенство $H = \nabla Q$, где функция $Q = Q(t,x)$ - гармоническая при почти каждом фиксированном значении t.*

Доказательство. Фиксируем какой-либо круг B, содержащийся в области Ω. В этом круге справедливо (см. [2, с. 41-44]) разложение: $H = \overset{\circ}{H} + \nabla Q$, где $\overset{\circ}{H}$ - соленоидальное векторное поле с носителем в этом круге, Q - локально суммируемая функция с квадратично суммируемым градиентом. Пусть функция $\xi \in C_0^\infty(B)$. Тогда имеем обращение в нуль скалярного произведения $(\nabla\xi, \nabla Q) = 0$. Следовательно, функция Q - гармоническая. С другой стороны, для произвольного соленоидального векторного поля $\psi \in \overset{\circ}{C}{}_0^\infty(B)$ из следствия 3.1 и (3.3) имеем равенство $(H, \Delta\psi) = 0$ или $(\overset{\circ}{H}, \Delta\psi) = 0$. Если поле H достаточно гладкое по x, то этой гладкостью обладает и поле $\overset{\circ}{H}$. Поэтому $(\Delta\overset{\circ}{H}, \psi) = 0$. Так как поле ψ - произвольное, то $\Delta\overset{\circ}{H} = \nabla q$ (см.цитируемый выше результат из [2, с. 41-44])). Тогда скалярное произведение $(\Delta\overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{H}) = 0$. Применим разложение $\overset{\circ}{H}$ по собственным функциям оператора Лапласа. Отсюда выводим: $\overset{\circ}{H} = 0$.

Снимем предположение о гладкости H. Так как равенство следствия 3.1 выполняется для произвольного поля $\psi \in C_0^\infty(B)$, то оно будет выполняться и для усреднения поля H. Тогда и в этом случае, в результате предельного перехода по параметру усреднения, получаем необходимое равенство в круге B. Так как круг выбран произвольно, то, из условия односвязности области Ω, гармоническую функцию Q можно продолжить на всю область Ω.

Лемма доказана.

Уточним сейчас результат О.А. Ладыженской, касающийся решений начально-краевых задач в ограниченной области на плоскости. Уточнения касаются равномерных оценок норм в $L_2(\Omega)$ градиентов решений. Ценность такой оценки состоит в том, что она не зависит от коэффициента вязкости. Приведем и другие, более точные оценки.

Теорема 3.1. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu > 0$, соленоидальное векторное поле $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$, соленоидальное векторное поле f удовлетворяет на отрезке $[0, T]$ условиям лемм 2.1 и 2.2 и имеет конечную смешанную норму $PfP_{2,1}$. Тогда существует единственное обобщенное решение v задачи (1.1)-(1.3), которое принадлежит пространству $W_4^1([0, T] \times \Omega)$, имеет вторые обобщенные производные $v_{,ij}$ и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v||_2 \le ||\nabla\varphi||_2 + \int_0^t ||\nabla f||_2 dt$;
2) $||\Delta v||_{2,2}^2 \le \nu^{-1}||\nabla\varphi||_2||\nabla f||_{2,1} + \frac{1}{2\nu}(||\nabla f||_{2,1}^2 + ||\nabla\varphi||_2^2)$;
3) $||\nabla v||_{4,4} \le C/\sqrt[4]{\nu}$;
4) $||v||_2 \le ||\varphi||_2 + \int_0^t ||f||_2 dt$;
5) $||\nabla D_t v||_2 \le (||\nabla f(0,\cdot)||_2 + ||\nabla T^1||_2 + \int_0^t ||\nabla D_t f||_2 dt)\exp(C^2\sqrt{t/\nu})$;

где смешанные нормы вычислены на множестве $[0, t] \times \Omega$, векторное поле $T^1(x) = \nu\Delta\varphi(x) - \varphi_i(x)\varphi_{k,i}(x)$, константа C зависит только от $T,\ f,\ \varphi$.

Доказательство. Пусть v - слабый предел из (3.1). Тогда в силу леммы 3.3 из равенства (3.3) следует, что для $u = v$ почти всюду справедливо равенство (1.1) с функцией $p = P - Q$, где функция P из (2.11), функция Q из леммы 3.3. В силу леммы 3.1 и ее оценок векторное поле v есть слабое решение задачи (1.1)-(1.3) (см. определение в [2, с.178]).

Отметим некоторые свойства функции давления p. Для приближений v^{n_m} в ограниченной области Ω справедливо неравенство: $||D_t v^{n_m}||_2 \le C(\Omega)||\nabla D_t v^{n_m}||_2$.

Тогда оценка 2) леммы 2.2 дает относительно m и t равномерную ограниченность норм

$||D_t v^{n_m}||_2$. Отсюда для слабого предела v имеем ограниченность норм $||D_t v||_{2,2}$. Тогда из равенства (3.3) и леммы 3.3 в силу оценок леммы 3.1 следует, что градиент $\nabla(P-Q)$ принадлежит пространству $L_2([0,T]\times\Omega)$, как конечная линейная комбинация элементов этого пространства. (Принадлежность слагаемого $v_i v_{,i}$ этому пространству следует из условия $v\in W_4^1([0,T]\times\Omega)$ по лемме 3.1.) Полагаем сейчас в равенствах (1.1) $u=v$, $p=\mathrm{P}-Q$ в силу равенства (3.3) и леммы 3.3. Умножим каждое из них соответственно на координату v_k, сложим и проинтегрируем по области Ω. В результате имеем:

$$(D_t v, v)-\nu(\Delta v, v)+\int_\Omega v_i v_{k,i} v_k dx=(f,v)-(\nabla(P-Q),v).$$

Третье слагаемое слева и второе слагаемое справа обращаются в нуль. Скалярное произведение $(\Delta v, v)\le 0$. Поэтому из неравенства Коши-Буняковского имеем оценку: $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v||_2^2\le ||f||_2||v||_2$. Отсюда интегрированием по отрезку $[0,t]$ получаем оценку 4). Остальные оценки есть оценки леммы 3.1.

Единственность решения в классе $L_{p,q}$ доказана в [18]. Единственность в классе слабых решений Лере-Хопфа в размерности $n=2$ показана в [2, с.182]. Теорема доказана.

4. Свойства решений начально-краевой задачи в ограниченной области для уравнений Эйлера

Рассмотрим сейчас начально-краевую задачу для уравнений Эйлера, т.е. ситуацию, когда в (1.1) коэффициент вязкости $\nu=0$. Опираясь на оценку 1) теоремы 3.1, энергетическое неравенство и обобщенную теорему Арцела (см. [19, с.110]), докажем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть область Ω ограниченная, односвязная и звездная относительно некоторого круга. Предположим, что в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu=0$, соленоидальное векторное поле $\varphi\in \mathring{W}_2^3(\Omega)$, соленоидальное векторное поле f удовлетворяет на отрезке $[0,T]$ условиям лемм 2.1 и 2.2, и его норма PfP_2 равномерно ограничена на $[0,T]$. Тогда существует обобщенное решение v^0 задачи (1.1)-(1.3), которое принадлежит пространству $L_{4,4}([0,T]\times\Omega)$, имеет обобщенные производные $v^0_{,i}$, $i=1,2$, и удовлетворяет неравенствам:*

1) $||\nabla v^0||_2\le||\nabla\varphi||_2+\int_0^t||\nabla f||_2 dt$;
2) $||v^0||_2\le||\varphi||_2+\int_0^t||f||_2 dt$.

Для доказательства используем следующие вспомогательные утверждения.

Пусть X и Y - два компактных метрических пространства, $C(X,Y)$ - множество всех непрерывных отображений компакта X в компакт Y. Расстояние в $C(X,Y)$ определим формулой:

$$\rho(f,g)=\sup_{t\in X}\rho(f(t),g(t)).$$

Лемма 4.1. (Обобщенная теорема Арцела [19, с. 110].) *Для относительной компактности множества $V \subset C(X,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в V отображения были равностепенно непрерывны, т.е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $\rho(t_1,t_2) < \delta$ вытекает $\rho(v(t_1),v(t_2)) < \varepsilon$ каковы бы ни были v из V, t_1 и t_2 из X.*

Лемма 4.2. *Пусть v - решение задачи (1.1)-(1.3) из теоремы 3.1, где коэффициент $\nu \in (0,1]$, и нормы $PfP_2 \le M < \infty$ для всех $t \in [0,T]$. Тогда каковы бы ни были t и $t+h$ такие, что $t, t+h \in [0,T]$, всегда выполняется неравенство: $Pv(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)P_2^2 \le C|h|$, в котором универсальная константа $C = C(\varphi, f, T)$ не зависит от ν.*

Доказательство. Из равенства (1.1) и теоремы 3.1 выводим соотношение:

$$(D_t v(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)) - \nu(\Delta v(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)) +$$

$$+ \int_\Omega v_i(t+h,x) v_{k,i}(t+h,x)(v_k(t+h,x) - v_k(t,x))dx = (f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)).$$

Отсюда выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dh}||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_2^2 + \nu(\nabla v(t+h,\cdot), \nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))) =$$

$$= \int_\Omega v_i(t+h,x) v_{k,i}(t+h,x)\big(v_k(t+h,x) - v_k(t,x)\big)dx =$$

$$= (f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)). \tag{4.1}$$

Скалярные произведения в (4.1) оценим неравенством Коши-Буняковского и оценками 1), 4) из теоремы 3.1. Тогда

$$|(\nabla v(t+h,\cdot), \nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)))| \le 2(||\nabla\varphi||_2 + \int_0^T ||\nabla f||_2 dt)^2,$$

$$|(f(t+h,\cdot), v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))| \le 2M(||\varphi||_2 + \int_0^T ||f||_2 dt).$$

Интеграл в (4.1) обозначим символом J и оценим его неравенством Гельдера. Тогда

$$|J| \le ||v(t+h,\cdot)||_4 ||\nabla v(t+h,\cdot)||_2 ||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_4.$$

Нормы в L_4 оценим мультипликативным неравенством из [2, с.19, лемма 1]. В результате получаем

$$||v(t+h,\cdot)||_4 \le \sqrt{2}||v(t+h,\cdot)||_2^{1/2} ||\nabla v(t+h,\cdot)||_2^{1/2},$$

$$||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_4 \le \sqrt{2}||v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot)||_2^{1/2} ||\nabla(v(t+h,\cdot) - v(t,\cdot))||_2^{1/2}.$$

Применим к правым частям двух последних неравенств оценки 1) и 4) из теоремы 3.1. Тогда с некоторой постоянной $C = C(f,\varphi,T)$ имеем неравенство: $|J| \le$

$C(f,\varphi,T)$. Принимая во внимание предыдущие оценки скалярных произведений в (4.1), из (4.1) выводим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dh}||v(t+h,\cdot)-v(t,\cdot)||_2^2 \le C_1(f,\varphi,T)(\nu+1)$$

с подходящей новой константой C_1. Интегрируем это неравенство по отрезку $[0,h]$, если $h>0$, и $[h,0]$, если $h<0$. В любом случае получаем неравенство:

$$||v(t+h,\cdot)-v(t,\cdot)||_2^2 \le C_1(f,\varphi,T)(\nu+1)|h|.$$

Учитывая условие леммы, убеждаемся в ее справедливости. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Фиксируем φ и f, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1. Пусть в задаче (1.1)-(1.3) коэффициент $\nu \in (0,1]$. Пусть v - решение задачи (1.1)-(1.3) из теоремы 3.1. При фиксированном $t\in[0,T]$ векторное поле $v(t,\cdot)\in W_2^1(\Omega)$. Из оценок 1) и 4) теоремы 3.1 следует существование константы $C=C(f,\varphi,\mathrm{T})$ такой, что $||v(t,\cdot)||_2 \le C$, $||\nabla v(t,\cdot)||_2 \le C$ при всех $t\in[0,T]$. Следовательно, множество Y всех таких полей $v(t,\cdot)$ ограничено в пространстве $W_2^1(\Omega)$. По теореме вложения Соболева-Кондрашева [13, с.83] множество Y компактно вкладывается в любое пространство $L_q(\Omega)$ с показателем $2\le q<\infty$. Возьмем показатель $q=2$. Пусть $X=[0,T]$. Тогда отображения $t\to v(t,\cdot)$ есть непрерывные отображения множества X в множество Y по лемме 4.2. Более того, семейство отображений $\{v(t,\cdot)\}_{0<\nu\le 1}$ равномерно и равностепенно непрерывно по лемме 4.2. Тогда по лемме 4.1 это семейство является относительно компактным в метрике

$$\rho(f,g)=\sup_{t\in[0,T]}||(f(t,\cdot)-g(t,\cdot)||_2. \tag{4.2}$$

Таким образом, из последовательности решений $(v^n)_{n=1,2,\ldots}$ задачи (1.1)-(1.3), каждое из которых соответствует коэффициенту $\nu_n=1/n$, можно извлечь равномерно сходящуюся относительно этой метрики подпоследовательность $(v^{n_k})_{k=1,2,\ldots}$. Пусть

$$v^0=\lim_{k\to\infty}v^{n_k}.$$

Тогда, учитывая полунепрерывность норм, из оценок 1)и 4) теоремы 3.1 выводим неравенства:

$$||\nabla v^0||_2 \le ||\nabla\varphi||_2+\int_0^t ||\nabla f||_2 dt,\quad ||v^0||_2\le||\varphi||_2+\int_0^t ||f||_2 dt. \tag{4.3}$$

Покажем, что v^0 - слабое решение уравнений Эйлера. Векторные поля v^{n_k} - есть решения задачи (1.1)-(1.3). Поэтому справедливы интегральные тождества:

$$\int_0^T\int_\Omega \mathrm{v}_i^{n_k}D_t\xi_i dxdt-\frac{1}{n_k}\int_0^T\int_\Omega \nabla v_i^{n_k}\nabla\xi_i dxdt+\int_0^T\int_\Omega v_i^{n_k}v_j^{n_k}\xi_{j,i}dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \varphi_i(x)\xi_i(0,x)dxdt,\ k=1,\ldots,$$

где $\xi=\xi(t,x)$ - произвольное гладкое соленоидальное поле, которое обращается в нуль на границе области Ω и при $t\ge T$. Так как $\rho(v^{n_k},v^0)\to 0$ (см. (4.2)), когда

$k \to \infty$, то предельный переход в последнем равенстве в силу оценок (4.3) дает интегральное тождество:

$$\int_0^T \int_\Omega v_i^0 D_t \xi_i dxdt + \int_0^T \int_\Omega v_i^0 v_j^0 \xi_{j,i} dxdt = \int_0^T \int_\Omega \varphi_i(x) \xi_i(0,x) dxdt.$$

Следовательно, v^0 - слабое решение. Оно удовлетворяет нулевому граничному условию в обобщенном смысле, поскольку $v^n|_{\partial\Omega} = 0$, и, отображения v^n непрерывные. Векторное поле v^0 удовлетворяет начальному условию: $||v^0(t,\cdot) - \varphi||_2 \to 0$, если $t \to 0$. Это следует из равномерной и равностепенной непрерывности в среднем (см. лемму 4.2) множества полей $\{v(t,\cdot)\}_{0<\nu\leq 1}$ и непрерывности решений v. Наконец, из мультипликативного неравенства [2, с.19, лемма 1] и (4.3) имеем равномерную относительно t оценку:

$$||v^0(t,\cdot)||_4 \leq \sqrt{2}||v^0(t,\cdot)||_2^{1/2}||\nabla v^0(t,\cdot)||_2^{1/2} \leq C(f,\varphi,T).$$

Отсюда получаем включение $v^0 \in L_{4,4}([0,T] \times \Omega)$. Вместе с оценками (4.3) имеем утверждение теоремы. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. На самом деле слабое решение v^0 имеет равномерно ограниченные нормы $||v^0||_p$ относительно $t \in [0,T]$ при любом конечном значении показателя $p \geq 2$, что является следствием общего мультипликативного неравенства (см. [21, с. 80-84])

$$||v^0||_{\mathrm{p}} \leq \beta||v^0||_2^{1-\alpha}||\nabla v^0||_2^{\alpha}$$

и равномерных оценок (4.3).

6. Заключительные замечания

В размерностях $n \geq 3$ имеем принципиально иную ситуацию, на которую влияет существенным образом интеграл

$$\int_\Omega u_i u_{k,i} \Delta u_k dx,$$

который может быть отличным от нуля (см. следствие 1.1). Его влияние на свойства решений уравнений Навье-Стокса и явление турбулентности в пространстве рассматривалось автором в [4, 22, 23]. По мнению автора с помощью интеграла $\int_\Omega \varphi_i \varphi_{k,i} \Delta\varphi_k dx$ для начальной скорости можно действительно изучить свойства решений уравнений Эйлера в пространстве и некоторые физические особенности идеальной жидкости.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Решение "в целом" краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных// ДАН СССР. 1958.Т. 123. С.427-429.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. второе. - М: Наука, 1970.
3. Киселев А.А., Ладыженская О.А. О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т.21. С. 655-680.
4. Семенов В.И. О свойстве гладкости решений уравнений Навье - Стокса в нелинейной нестационарной задаче Коши в пространстве. Препринт. Кемерово: Кузбассвузиздат, 2007, с.1-40.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.:Мир. 1973.
6. Решетняк Ю.Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром// Сиб.мат.журн. 1970. Т.11. №3. С.414-428.

7. Семенов В.И. Квазиконформные потоки в пространствах Мебиуса//Мат. сборник. 1982. Т.119(161). №3. С.325-339.
8. Семенов В.И. Полугруппы некоторых классов отображений//Сиб. мат. журн. 1977. Т.18,№4. С. 877-889.
9. Семенов В.И. Об однопараметрических группах квазиконформных гомеоморфизмов в эвклидовом пространстве//Сиб. мат. журн. 1976. Т.17,№1. С. 177-193.
10. Доброхотов М.Ю., Шафаревич А.И. О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. №4. С.38-42.
11. Brandolese L. On the localisation of symmetric and asymetric solutions of the Navier-Stokes equations in R^n// Comp. Rend. Acad. Sci. ||aris. Ser. I. 2001. V.332. P.125-130.
12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973.
13. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. 1962.
14. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.-М.:Наука, 1983.
15. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики//Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1954. Т.18.№1, С.3-50.
16. Соболев С.Л. Избранные труды. Т.1.-Новосибирск: Изд-во Института математики, 2003.
17. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость//УМН. 2003. Т.58. №2. С. 45-78.
18. Ладыженская О.А. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса// Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т.5. С. 169-185.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968.
20. Пухначев В.В. Интегралы движения несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство// Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т.45. №2. С.22-27.
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.-М.: Наука, 1967.
22. Семенов В.И. Необходимые и достаточные условия существования в целом гладких решений уравнений Навье - Стокса в нелинейной нестационарной задаче Коши в пространстве//(в печати).
23. Семенов В.И. Детерминизм динамики жидкости и уравнения Навье-Стокса//(в печати).
24. Prodi G. Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes// Annali di Mat. 1959. V.48. P. 173-182.
25. Serrin J. The initial value problem for the Navier-Stokes equations// Nonlinear Problems/ ed. R.Langer. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. P.69-98.

GENERAL PROPERTIES OF SOLENOIDAL VECTOR FIELDS AND ITS APPLICATIONS TO 2ND EULER AND NAVIER-STOKES EQUATIONS

V.I. SEMENOV

Kuzbass regional institute of professional formation development

e-mail: visemenov@rambler.ru

There are proved important integral identities for solenoidal vector fields. These statements give a new standpoint on a priori estimate that O. Ladyzhenskaya proved. In particular, we have a priori estimate independent of a viscosity and the existence of global solutions for the Euler equations. Why is no there of a turbulence phenomenon for the 2d case? This fact shows one of proving identities. Other identities can be used in conservation laws.

Key words: integral identities, global solution, a priori estimate, stresses tensor, Navier-Stokes and Euler equations.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Авад Х.К.	– аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Богатов Е. М.	– кандидат физико-математических наук, заместитель директора Старооскольского технологического института (филиала) Московского государственного института стали и сплавов
Бродский Р.Е.	– аспирант института монокристаллов Национальной академии наук Украины
Бурцев М.В.	– ассистент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Орловского государственного университета
Вирченко Ю.П.	– доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Белгородского государственного университета
Глушак А.В.	– доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Адель Т. Диаб	– кандидат физико-математических наук, профессор факультета естественных наук университета Аин Шамс, Египет
Есин В.А.	– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, теории чисел и геометрии Белгородского государственного университета
Зарубин А.Н.	– доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Орловского государственного университета
Манаенкова Т.А.	– аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Мейрманов А.М.	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики Белгородского государственного университета
Мешков В.З.	доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета
Науменко А.П.	– студент факультета математики и информационных технологий Белгородского государственного университета
Половинкин И.П.	– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета
Полунин В.А.	– аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Прядиев В.Л.	– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Белгородского государственного университета
Семенов В.И.	– доктор физико-математических наук, профессор Кузбасского регионального института повышения квалификации и переподготовки работников образования
Солдатов А.П.	– доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Белгородского государственного университета

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Уважаемые коллеги!

Материалы необходимо высылать в 2-х экземплярах:

- по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85, Белгородский государственный университет;
- по электронной почте beknazarov@bsu.edu.ru – Бекназаров Михаил Николаевич, ответственный секретарь серии журнала, тел. (4722) 30-18-18, добавочный – 28-16, (сайт журнала http://unid.bsu.edu.ru/unid/res/pub/index.php).

Статьи, отклоненные редколлегией, к повторному рассмотрению не принимаются. Материалы, присланные без соблюдения правил, редколлегией не рассматриваются.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ СЕРИИ «МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА» ЖУРНАЛА «НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ БЕЛГУ»

В материалы включается следующая информация:

1) УДК научной статьи;
2) аннотация статьи (не более 1200 знаков);
3) ключевые слова;
4) сведения об авторах (Ф.И.О., должность с указанием места работы (без сокращений), ученая степень, ученое звание, почтовый адрес, адрес электронной почты (если имеется), контактные телефоны);

на русском и английском языках

5) внешняя рецензия доктора наук (для аспирантов и кандидатов наук);
6) текст статьи;
7) ссылки.

на русском языке

Технические требования к оформлению текста

1. Текст набирается в Microsoft Word 2000/2003. Лист – А4, портретный. Без переносов.

2. Поля:
- правое – 1,5 см;
- левое – 3,0 см;
- нижнее – 2,0 см;
- верхнее – 2,0 см.

3. Шрифт:
- гарнитура: текст – **Georgia**; УДК, название, ФИО автора – **Impact**;
- размер: в тексте – **11 пт**; в таблице - **9 пт**; в названии – **14 пт.**

4. Абзац:
- отступ 1,25 мм, выравнивание – по ширине;
- межстрочный интервал – одинарный.

5. Ссылки:
- номер ссылки размещается в квадратных скобках перед знаком препинания (перед запятой, точкой);
- нумерация – автоматическая, сквозная;
- текст сноски внизу каждой страницы;
- размер шрифта – 10 пт.

6. Объем статей: до **8 страниц (Georgia, 11 пт).**

7. Формулы набираются в «Редакторе формул» Word, допускается оформление формул только в одну строку, не принимаются формулы, выполненные в виде рисунков, формулы отделяются от текста пустой строкой.

8. Требования к оформлению статей, таблиц, рисунков приведены в прил. 1, 2, 3.

Приложение 1. Оформление статьи

УДК 65.01

КЛЮЧЕВЫЕ ВЫЗОВЫ РАЗВИТИЮ РЕГИОНА В УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛИЗАЦИИ РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ*

А.В. ИВАНОВ[1]
Л.Н. ПЕТРОВ[2]

[1] Департамент экономического развития Белгородской области

[2] Белгородский государственный университет

e-mail: bor@bsu.edu.ru

При выборе пути инновационного развития необходимо учитывать возможные риски и ограничения социально-экономического развития, продуцированные перспективами постепенного вступления России в единое мировое экономическое пространство. В работе рассмотрены ключевые вызовы развитию России и регионов на долгосрочную перспективу.

Ключевые слова: глобализация, вызовы развитию, риски и ограничения социально-экономического развития, региональная политика.

В последние годы в российском обществе обозначился явный дефицит долгосрочного (на 10-15 и более лет) видения перспектив развития национальной экономики[6].

KEY CALLS TO DEVELOPMENT OF REGION IN CONDITIONS GLOBALIZATION OF THE RUSSIAN ECONOMY

A.V. IVANOV[1]
L.N. PETROV[2]

[1] Department of economic development of the Belgorod area

[2] Belgorod state university

e-mail: bo@bsu.edu.ru

At a choice of a way of innovation of development it is necessary to take into account the risks and restrictions of socio economic development, producering by prospects of the gradual introduction of Russia in uniform world economic space are possible. In work the key calls to development of Russia and regions on long-term prospect are considered.

Key words: globalization, calls to development, risks and restrictions of socio economic development, regional policy.

[6] Караганов С.А. XXI век и интересы России // Современная Европа. – 2004. – №3. – С.6; Айналов Д.В. Эллинистические основы византийского искусства. – СПб., 1900. – С.2.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Иванов А.В.	кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и права Белгородского государственного университета 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85, Белгородский государственный университет; e-mail: dizelsnab@mail.ru, тел. 33-22-44

Приложение 2. Оформление таблиц

1. Каждая таблица должна быть пронумерована справа, иметь заголовок, расположенный по центру.

Таблица 1

Рейтинговая оценка ЦФО за 1999-2004 гг.

Регионы	1999 г.	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	В среднем за	
							1999-2001 гг.	2002-2004 гг.
РФ	1,3222	1,5091	1,3470	1,4661	1,5940	1,6954	1,3928	1,5852
ЦФО	1,5028	1,9389	1,7210	1,6149	1,6888	1,6930	1,7209	1,6656

2. Таблицы не должны выходить за границы полей страницы слева и справа.

Таблица 1

Рейтинговая оценка ЦФО за 1999-2004 гг.

Регионы	1999 г.	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	В среднем за	
							1999-2001 гг.	2002-2004 гг.
РФ	1,3222	1,5091	1,3470	1,4661	1,5940	1,6954	1,3928	1,5852
ЦФО	1,5028	1,9389	1,7210	1,6149	1,6888	1,6930	1,7209	1,6656

3. Если таблица располагается на 2-х страницах, ее столбцы должны быть пронумерованы на каждой новой странице, так же, как на первой.

Таблица 1

Рейтинговая оценка ЦФО за 1999-2004 гг.

Регионы	1999 г.	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	В среднем за	
							1999-2001 гг.	2002-2004 гг.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
РФ	1,3222	1,5091	1,3470	1,4661	1,5940	1,6954	1,3928	1,5852
ЦФО	1,5028	1,9389	1,7210	1,6149	1,6888	1,6930	1,7209	1,6656

Таблица, расположенная на первой странице.

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Белгородская область	1,2620	0,4169	2,2612	1,0176	1,2012	0,6413	1,3134	0,9534
Брянская область	0,9726	0,4817	0,5612	1,8653	0,9064	1,6898	0,6718	1,4872

Таблица, расположенная на следующей странице.

Приложение 3. Оформление графических объектов

1. Изображение каждого графического объекта должно иметь номер и заголовок, расположенные по центру рисунка.

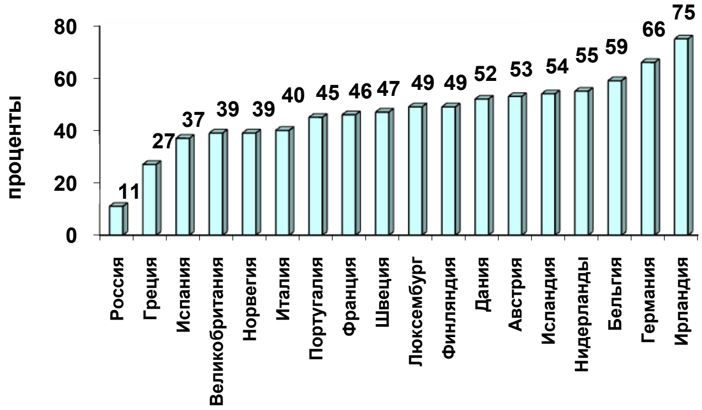

Рис. 1. Уровень инновационной активности в России, странах ЕС, Норвегии, Исландии

2. Изображение графического объекта должно быть в виде рисунка или сгруппированных объектов.

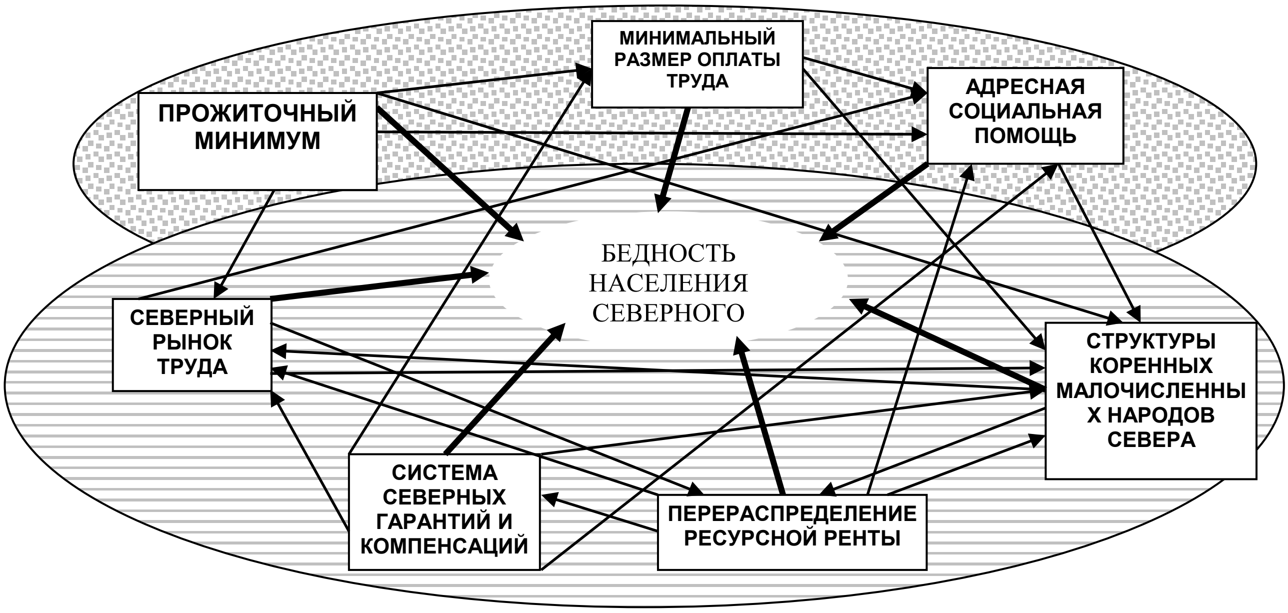

Рис 2. Институциональная среда существования бедности населения северного региона России

3. Изображение графического объекта не должно выходить за пределы полей страницы.

4. Изображение графического объекта не должно превышать одной страницы.